Lösung zur Juli-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. Aufgabe: (ges.: 8 Punkte)

Gegeben ist das reelle homogene lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{rcrl} x_1 & + & 2x_2 & = 0 \\ 4x_3 & - & 2x_2 & = 0 \\ x_1 & + & ax_3 & = 0 \end{array}$$

a) Stellen Sie die Koeffizientenmatrix A auf und bringen Sie A in Zeilenstufenform (ZSF).

b) Bestimmen Sie den Rang von A in Abhängigkeit des Parameters a.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit des Parameters a.

(a) **(3 Punkte)**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Der Schritt $I - III \to III$ ergibt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -a \end{bmatrix},$$

Anschließende Umformung $II + III \to III$ ergibt als eine ZSF von A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4-a \end{bmatrix}.$$

(b) **(2 Punkte)** Es ist Rang $A = \#$ Kopfvariablen (= Anzahl Nichtnullzeilen) in der ZSF. Rang $A = 2$, falls $a = 4$, ansonsten ist Rang $A = 3$.

(c) **(3 Punkte)**

$\underline{\underline{a = 4}}$: $(I + II) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ablesen der Gleichungen: $x_1 = -4x_3, x_2 = 2x_3$,

Lösungsmenge $L_{a=4} = \{s \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} | s \in \mathbb{R}\}$ $\quad (= \text{span}\{\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\})$.

$\underline{\underline{a \neq 4}}$: $L_{a\neq 4} = \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$.

---

2. Aufgabe: (ges.: 7 Punkte)

Bestimmen Sie, ob $M := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

Jede Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ hat 4 Elemente; daher reicht zu zeigen, dass die 4 Vektoren linear unabhängig sind (alternativ: ein Erzeugendensystem bilden).

Aufstellen der Gleichung für l.u. (bzw. Erzeugendensystem)

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Wir zeigen hier die lineare Unabhängigkeit der Vektoren. Komponentenvergleich führt zu der Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmung der Determinante:

$$\det(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}) = (-5)\det(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = (-5)\det(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}) = (-5)(6-2) \neq 0.$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ die Spaltenvektoren sind linear unabhängig, also ist M eine Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$.

---

3. Aufgabe: (ges. 15 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $C := \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$.

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes sowie die Eigenwerte von C.

b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren zum selben Eigenwert sind.

c) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zu dem Eigenwert 2.

d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D, so dass die folgende Gleichung gilt: $C = SDS^{-1}$.

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = C\vec{y}(t), \vec{y}_0 := \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) **(4 Punkte)**

$$p_\lambda(C) = \det(C - \lambda I_3) = \det(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & -2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}).$$

Berechnung von $p_\lambda(C)$ (Entw. nach 3. Zeile):

$$\begin{aligned} &= (1-\lambda)[(-1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)\cdot 3] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \qquad (= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = 1, \lambda_3 = 2$

(b) **(3 Punkte)** Ansatz. Berechnung des Matrix-Vektor-Produktes $C\vec{v}$:

$$C\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\quad C\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Die Vektoren werden auf sich selbst abgebildet, sind also Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

(c) **(3 Punkte)** Aufstellen der (erweiterten) Koeffizientenmatrix $[C-2I_3]$ (bzw. $[C-2I_3|\vec{0}]$):

$$\begin{bmatrix}-3&3&-2\\-2&2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\quad\text{bzw.}\quad\left[\begin{array}{ccc|c}-3&3&-2&0\\-2&2&-2&0\\0&0&-1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

und lösen des LGS $\Rightarrow x_3=0, x_1=x_2$.

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 2: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

(d) **(2 Punkte)** $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ $\quad S=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\2&1&0\end{bmatrix}$

(e) **(3 Punkte)** Da $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ ein EV zum EW $\lambda=1$ ist, können wir den Ansatz $\vec{y}(t)=e^{\lambda(t-t_0)}\vec{y}(t_0)$ benutzen.

$\vec{y}(t)=e^{t-3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\left(=\begin{bmatrix}e^{t-3}\\2e^{t-3}\\2e^{t-3}\end{bmatrix}\right)$

Alternativ: Formel für die Lösung der Differentialgleichung benutzen:

$$\vec{y}(t)=\exp((t-3)C)y_0=\exp((t-3)\cdot(SDS^{-1}))y_0=S\exp((t-3)D)S^{-1}y_0.$$

wobei

$$\exp((t-3)D)=\begin{bmatrix}e^{(t-3)}&0&0\\0&e^{(t-3)}&0\\0&0&e^{2(t-3)}\end{bmatrix}\ldots$$

---

4. Aufgabe: (ges. 10 Punkte)

Gegeben ist die Basis $\mathcal{B}:=\{x+1,x-1\}$ des $\mathbb{R}_{\le 1}[x]$.

1. Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ von $\mathbb{R}_{\le 1}[x]$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

2. Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$L:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_{\le 1}[x]&\to&\mathbb{R}_{\le 1}[x]\\ ax+b&\mapsto&(5a-3b)x+(4a-2b)\end{array}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

3. Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right)$.

(a) (**4 Punkte**) Die Koordinaten eines Polynoms $p(x) = ax + b$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ sind die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$ax + b = \lambda_1(x + 1) + \lambda_2(x - 1).$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem LGS

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = b$$

Lösung des LGS: $\lambda_1 = (a + b)/2$, $\lambda_2 = (a - b)/2$
Die Koordinatenabbildung ist

$$K_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}^2;\ ax + b \mapsto \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) (**4 Punkte**) Berechnung der Bilder der Basisvektoren:

$$L(x + 1) = 2x + 2, \qquad L(x - 1) = 8x + 6.$$

Bestimmung der Koordinaten dieser Bilder bezüglich $\mathcal{B}$:

$$(2x + 2 = 2 \cdot (x + 1) + 0 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow)\ K_{\mathcal{B}}(2x + 2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(8x + 6 = 7 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow)\ K_{\mathcal{B}}(8x + 6) = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Darstellende Matrix:

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) (**2 Punkte**)

Es ist $K_{\mathcal{B}}{}^{-1}(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}) \quad = \quad a(x + 1) + b(x - 1) \quad = \quad (a + b)x + (a - b).$