Lösung zur Juli-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. Aufgabe: (ges. 9 Punkte)

Eine lineare Abbildung ist gegeben durch $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \vec{x} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}.$

(a) Welche Eigenwerte hat die Abbildung L?

(b) Ist L diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie $\dim(\text{Kern}(L))$ und $\dim(\text{Bild}(L))$.

(d) Ist L eine bijektive Abbildung?

(a) **(2 Punkte)** Bei einer oberen Dreiecksmatrix stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen $\Rightarrow$ die Abbildung L hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 3$. (Alternativ: Das char. Polynom ist $p(\lambda) = (\lambda - 2)\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 3)$ und hat $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ als Nullstellen.)

(b) **(2 Punkte)** L ist diagonalisierbar genau dann, wenn für jeden Eigenwert algebraische Vielfachheit und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

- algebraische Vielfachheit: jeweils 1 (s. charakt. Polynom),
- geometrische Vielfachheit: $1 \leq (\text{geom VFH } \lambda_i) \leq (\text{alg VFH } \lambda_i) = 1$

[Alternativ: L hat $4 = \dim \mathbb{R}^4$ paarweise verschiedene Eigenwerte, also hat L 4 linear unabhängige Eigenvektoren, die dann eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden.]

$\Rightarrow L$ ist diagonalisierbar.

(c) **(3 Punkte)** Nach (b) ist $\dim(\text{Kern }(L)) = \dim(\text{V}_{\lambda_2=0}) = 1$; Dimensionssatz gibt

$$\dim(\text{Bild}(L)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{Kern}(L)) = 4 - 1 = 3.$$

[Alternativ: Eine Zeilenstufenform der darst. Matrix von L ist

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

hieraus liest man

$$\dim(\text{Bild}(L)) = \text{Rang}(L) = \#\text{Kopfvariablen} = 3$$

und

$$\dim(\text{Kern}(L)) = \#\text{Nichtkopfvariablen} = 1$$

ab.

(d) **(2 Punkte)** Nach (b) bzw. (c) ist Kern $(L) \neq \{\vec{0}\}$ beziehungsweise $\dim(\text{Kern}(L)) \neq 0$; L ist also nicht injektiv. L ist daher nicht bijektiv.

---

2. Aufgabe: (ges. 10 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ die lineare Abbildung, die definiert ist durch:

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x^2 + 3x \qquad F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2x + 4$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = x + 2 \qquad F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = -3x^2 + 9x$$

(a) Bestimmen Sie $F\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Bestimmen Sie **zwei** Elemente von Kern(F).

(c) Ist F eine invertierbare Abbildung?

(a) **(3 Punkte)**

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

F linear

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad F(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}) &= F(3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) \\ &= 3F(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) - 2F(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) \\ &= 3(x^2+3x) - 2(2x+4) \;=\; 3x^2+5x-8. \end{aligned}$$

(b) **(4 Punkte)** Bestimmung eines Vektors $\neq 0$ aus dem Kern(F). Z.B. ist

$$F(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) \;=\; 2x+4 \;=\; 2(x+2) \;=\; 2F(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}),$$

also

$$F(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = 0$$

und damit $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in$ Kern(F).

Angabe eines weiteren Vektors aus Kern(F) mit Argument:

- Linearität von $F \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in$ Kern(F)
- oder allgemein skalare Vielfache von $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) **(3 Punkte)** Nach (b) ist Kern$(F) \neq \{\vec{0}\} \Rightarrow F$ ist nicht injektiv $\Rightarrow F$ ist nicht bijektiv $\Rightarrow F$ ist nicht invertierbar.

---

3. Aufgabe: (ges. 10 Punkte)

Gegeben ist die Basis $\mathcal{C} := \left\{ \vec{c}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{c}_2 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{c}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$, der mit dem Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ausgestattet ist. Das Gram-Schmidt-Verfahren angewendet auf $\mathcal{C}$ ergibt die Orthonormalbasis $\mathcal{Q} := \left\{ \vec{q}_1 := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{q}_2 := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{q}_3 := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

Ferner sei $Q := [\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3]$.

(a) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu Q.

(b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix $C := [\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3]$.

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Q\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ sind zu einander orthogonal. Bestimmen Sie $\langle Q\vec{v}_1, Q\vec{v}_2 \rangle$.

(Die Bemerkung
"Q ist eine orthogonale Matrix, weil $\mathcal{Q}$ eine ONB bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^3$ ist."
ist wichtig für die verschiedenen Teilen und wird einmalig mit **1 Punkt** vergeben.)

(a) **(2 Punkte)** Q orthogonal $\Rightarrow Q^{-1} = Q^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) **(3 Punkte)**

$$R = Q^T C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) **(2 Punkte)**

$$Q\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = Q^T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(d) **(2 Punkte)** Q ist eine othogonale Matrix also eine orthogonale Abbildung bzgl. des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^3$. Nach der Definition einer orthogonaler Abbildung gilt $\langle Qv_1, Qv_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle = 0$, weil $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ orthogonale Vektoren sind.

---

4. Aufgabe: (ges. 11 Punkte)

Prüfen Sie, ob es sich bei den gegebenen Mengen M_1, M_2, M_3 um Teilräume des $\mathbb{R}^{2,2}$ handelt.

$$\begin{aligned} M_1 &:= \left\{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \dim(\mathrm{Kern}(A)) = 0\right\} \\ M_2 &:= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \mid a,b,c,d \text{ sind ganze Zahlen}\right\} \\ M_3 &:= \left\{B \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; B\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \end{aligned}$$

(a) **(3 Punkte)** dim Kern $\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \Rightarrow$ der Nullvektor $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist nicht in M_1, muss aber in jedem Teilraum enthalten sein. M_1 ist deshalb kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

Alternativ kann man auch argumentieren, dass die additive Abgeschlossenheit (z.B. $A+(-1)A = N \notin M_1$ für bel. $A \in M_1$) oder die skalare Abgeschlossenheit (z.B. $\lambda A = N$ für bel. $A \in M_1$, $\lambda = 0$) nicht erfüllt ist.

(b) **(3 Punkte)** Weil 1 eine ganze Zahl ist, ist $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$, aber für z.B. $\lambda = \frac{1}{2}$ ist die Matrix $\lambda A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \notin M_2$. M_2 ist deshalb kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.

(c) **(5 Punkte)** M_3 ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$:

(i) M_3 ist nichtleer, z.B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3$, da $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(ii) Für $A, B \in M_3$ ist $A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$(A+B)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

also ist $A + B \in M_3$.

(iii) Für $A \in M_3$, $\lambda \in R$ ist $(\lambda A)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda(A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \lambda\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, so dass $\lambda A \in M_3$.