Lösung zur Oktober-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

---

1. Aufgabe (11 Punkte)

Die normierte Zeilenstufenform einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,5}$ ist $\tilde{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie:
i) $\dim(\text{Kern}(A))$
ii) $\dim(\text{Bild}(A))$

(b) Betrachten Sie A als eine Matrixabbildung.
i) Bestimmen Sie den Urbildraum und den Bildraum.
ii) Ist A eine injektive/surjektive/bijektive Abbildung?

(a) **(2 + 2 Punkte)**

(i) $\dim \text{Kern } A = \#$ Nichtkopfvariablen in der NZSF$= 3$.

(ii) $\dim \text{Bild } A = \#$ Kopfvariablen in der NZSF (oder $=$ Rang A)$= 2$.

(b) **(2 + 5 Punkte)**

(i) Bildraum: $\mathbb{R}^3$, Urbildraum: $\mathbb{R}^5$.

(ii) $\dim \text{Kern } A = 3$, also $\text{Kern } A \neq \{0\} \Rightarrow A$ ist nicht injektiv,
$\dim \text{Bild } A = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow A$ ist nicht surjektiv,
A ist nicht injektiv/surjektiv $\Rightarrow A$ nicht bijektiv.

---

2. Aufgabe (11 Punkte)

Drei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ der Matrix $C := \begin{bmatrix} -8 & 5 & 0 \\ -10 & 7 & 0 \\ -5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ sind bekannt.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von C, ohne das charakteristische Polynom von C zu berechnen.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix S, so dass

$$S^{-1}CS = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

gilt.

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix C.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = C\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 := \vec{y}(5) = \vec{v}_3$.

(e) Ist C eine invertierbare Matrix?

(a) **(3 Punkte)**

Ansatz: $Ax = \lambda x$ zur Bestimmung von Eigenwerten,
durch Rechung ergibt sich $\lambda_1 = -3, \lambda_1 = 2, \lambda_1 = -3$.

(b) **(2 Punkte)**

Die Spalten von S sind die Eigenvektoren von C, ihre Reihenfolge entspricht der der Eigenwerte auf der Diagonalen von $S^{-1}CS$. Daher ist

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) **(2 Punkte)**

Das charakteristische Polynom hat genau die Eigenwerte als Nullstellen, also ist $p_C(x) = (x+3)^2(x-2)$ (oder $p_C(x) = -(x+3)^2(x-2)$.)

(d) **(2 Punkte)**

v_3 ist ein Eigenvektor (zum Eigenwert $\lambda = -3$), also ist die Lösung nach Vorlesung gegeben durch

$$y(t) = e^{\lambda(t-t_0)}y_0.$$

Die Lösung ist daher:

$$y(t) = e^{-3(t-5)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(e) **(2 Punkte)**

$\lambda = 0$ ist kein Eigenwert bzw. $\det C = 18 \neq 0 \Rightarrow C$ ist invertierbar.

---

3. Aufgabe (8 Punkte)

Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^{2,2}$ ist definiert durch

$$L(x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ L(2x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ L(x+1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $L(6x^2 - 8x)$.

(b) Bestimmen Sie ein von Nullpolynom verschiedenes Element in Kern (L).

(c) Ist L eine surjektive Abbildung?

(a) **(2 Punkte)**

Ausnutzen der Linearität:

$$L(6x^2 - 8x) = 6 \cdot L(x^2) - 4 \cdot L(2x) = 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) **(3 Punkte)**

Z.B. $3x^2 - 2(x+1) \in \text{Kern} L$, da

$$L(3x^2 - 2(x+1)) = 3 \cdot L(x^2) - 2 \cdot L(x+1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) **(3 Punkte)**

$$\dim \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = 3 = \dim \text{Kern } L + \dim \text{Bild} L$$
$$\Rightarrow \dim \text{Bild} L < 4 = \dim \mathbb{R}^{2,2}.$$

L ist also nicht surjektiv.

---

4. Aufgabe (10 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$
\begin{array}{cccccccc}
L_1: & \mathbb{R}^{2,2} & \to & \mathbb{R}_{\leq 2}[x]; & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & x^2 + (a+b)x + (c+d) \\
L_2: & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}^2; & ax+b & \mapsto & \begin{bmatrix} a \\ a+b \end{bmatrix} \\
L_3: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2; & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} a \\ \sqrt{a^2+b^2} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(a) **(2 Punkte)**

Gegenbeispiel z.B.: $L_1(0_{\mathbb{R}^{2,2}}) = x^2 \neq 0_{\mathbb{R}_{\leq 2}[x]}$,

$$\text{oder} \quad 2 \cdot L_1\Big(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Big) = 2x^2 + 4x + 4 \neq L_1\Big(2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Big) = x^2 + 4x + 4$$

L_1 ist also nicht linear.

(b) **(5 Punkte)**

Beweis der Additivität:

$$L_2\big(ax+b\big) + L_2\big(cx+d\big) = \begin{bmatrix} a \\ a+b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ a+b+c+d \end{bmatrix} = L_2\big((a+c)x + (b+d)\big).$$

Beweis der Skalarität:

$$L_2\big(\lambda(ax+b)\big) = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda(a+b) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ a+b \end{bmatrix} = \lambda L_2\big(ax+b\big).$$

L_2 ist also linear.

(c) **(3 Punkte)**

Gegenbeispiel z.B.:

$$(-1) \cdot L_3\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Big) = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \neq L_3\Big((-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Big) = L_3\Big(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Big) = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

L_3 ist also nicht linear.