Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS09

O. Holtz / M. v. Renesse / K. Roegner 22.7.2009

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

1. Aufgabe **(14 Punkte)**

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ hat Eigenwerte $\lambda_1 := -2$ und $\lambda_2 := 3$ und erfüllt die Gleichungen:

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie $A\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ sowie $A\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die Eigenräume zu den Eigenwerten -2 und 3 von A.

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

d) Ist A diagonalisierbar?

e) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A_{\mathcal{B}}$ von A bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ des $\mathbb{R}^2$.

f) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dfrac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

a) **(3 Punkte)** Aus der Linearität von Matrixabbildungen folgt:

$$A\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} = A\left(2\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = 2A\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

b) **(3 Punkte)**

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert } -2$$

$$A\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert } 3$$

Da $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ maximal zwei linear unabhängige Eigenvektoren in $\mathbb{R}^2$ haben kann, und Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerte linear unabhängig sind, gibt es keine weiteren linear unabhängigen Eigenvektoren. Die Eigenräume von A sind:

$$V_{\lambda_1=-2} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \qquad V_{\lambda_2=3} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$$

c) **(2 Punkte)** Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $c_A(z)$. Weil A vom Format 2×2 ist, ist $c_A(z)$ vom Grad 2, so dass $c_A(z) = (z+2)(z-3)$ gilt.

d) **(2 Punkte)** Aus dem Argument in c) folgt, dass die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts 1 ist. Von daher ist A diagonalisierbar.

e) **(2 Punkte)** Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung bzgl. einer Basis von Eigenvektoren ist diagonal mit den Eigenwerten in der entsprechenden Reihenfolge auf der Diagonalen:

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

f) **(2 Punkte)** Weil $\vec{y}_0$ eine Eigenvektor zum Eigenwert 3 für $t_0 = 0$ ist, gilt $\vec{y}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2. Aufgabe **(10 Punkte)**

Betrachten Sie die Abbildung $S : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{1,1}; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto [a+d]$.

a) Zeigen Sie, dass S eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie $\dim(\text{Bild}(S))$ und $\dim(\text{Kern}(S))$.

c) Ist S eine bijektive Abbildung?

a) **(4 Punkte)**

• Für $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ gilt:

$$S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) = [a+e+d+h]$$

$$= [a+d] + [e+h] = S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + S\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$

• Für $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$S\left(\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}\right) = [\lambda a + \lambda d] = \lambda[a+d] = \lambda S\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

b) **(4 Punkte)** Jedes Element $a \in \mathbb{R}^{1,1}$ hat das Urbild $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim(\text{Bild}(S)) = \dim \mathbb{R}^{1,1} = 1$.

$4 = \dim \mathbb{R}^{2,2} = \dim(\text{Bild}(S)) + \dim(\text{Kern}(S)) = 1 + \dim(\text{Kern}(S)) \Rightarrow \dim(\text{Kern}(S)) = 3$

c) **(2 Punkte)** Aus b) folgt S ist nicht injektiv ($\dim(\text{Kern}(S)) \neq 0$), so dass S auch nicht bijektiv ist.

3. Aufgabe **(10 Punkte)**

Gegeben sind der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ und die Menge

$$P := \{p_1 := x^2 + x + 1, p_2 := 3x^2 + 3x, p_3 := 4x^2 + 4x - 1\} \subset V.$$

a) Bestimmen Sie ein Element $q \in V$, so dass die Gleichung $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = q$ keine Lösung hat.

b) Ist P eine Basis von V?

c) Die lineare Abbildung $L_1 : V \to \mathbb{R}^2$ bildet $3x^2 + 3x$ auf $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ ab. Bestimmen Sie $L_1(x^2 + x)$.

d) Die Polynome p_1 und p_2 sind linear unabhängig. Wenn $L_2 : V \to V$ eine **injektive** lineare Abbildung ist, sind dann auch $L_2(p_1), L_2(p_2)$ linear unabhängig?

a) **(2 Punkte)** Die Koeffizienten vor x^2 und x müssen gleich sein. Von daher ist beispielsweise $q = x^2 + 2x \notin \text{span}\, P$.

b) **(2 Punkte)** Aus a) folgt, dass P kein Erzeugendensystem ist, so dass P keine Basis ist.

c) **(2 Punkte)** L_1 linear $\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = L_1(3x^2 + 3x) = 3L_1(x^2 + x) \Rightarrow L_1(x^2 + x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) **(4 Punkte)** $\alpha L_2(p_1) + \beta L_2(p_2) = \vec{0} \overset{\text{Linearität}}{\Longrightarrow} L_2(\alpha p_1 + \beta p_2) = \vec{0}$

$\Rightarrow \alpha p_1 + \beta p_2 \in \text{Kern}(L_2) \overset{\text{Injektivität}}{=} \{\vec{0}\}$

$\Rightarrow \alpha p_1 + \beta p_2 = \vec{0} \overset{\text{lin. Unabh. von } p_1, p_2}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = 0$

$\Rightarrow L_2(p_1), L_2(p_2)$ sind linear unabhängig

4. Aufgabe **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie Matrizen $B, C, D \in \mathbb{R}^{2,2}$, die die entsprechenden Bedingungen erfüllen.

a) Die Gleichung $B\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ hat die eindeutige Lösung $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) Der Rang von C ist ungleich der Anzahl der Köpfe von C.

c) Das charakteristische Polynom von D lautet $p_D(z) = z^2 - 9$, obwohl 3 und -3 nicht auf der Diagonalen liegen.

Zu jeder Aufgabe ist nur ein Beispiel gegeben. Es gibt viele anderen Möglichkeiten.

a) Zum Bespiel erfüllt die Matrix $B := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ die Gleichung $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$. Die Lösung zu $B\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ ist eindeutig, weil $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$.

b) Zum Bespiel hat die Matrix $C := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ zwei Köpfe. Die (N)ZSF von C ist $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\tilde{C}$ hat einen Kopf, so dass $\operatorname{Rang}(C) = 1$.

c) Zum Bespiel erfüllt die Matrix $D := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ die Bedingungen: $3, -3$ sind nicht auf der Diagonalen und das charakteristische Polynom von D ist

$$\det \begin{bmatrix} 1 - z & 2 \\ 4 & -1 - z \end{bmatrix} = (1 - z)(-1 - z) - 8 = z^2 - 9.$$