Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
O. Holtz / M. v. Renesse / K. Roegner

SS09
7.10.2009

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$ auf und bringen Sie $[A|\vec{b}]$ auf NZSF (normierte Zeilenstufenform).

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

c) Bestimmen Sie den Rang und den Kern der Matrix A.

Lösung:

a) *(3 Punkte)*

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[IV+III]{II+I} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[II \leftrightarrow III]{III-I} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[I-II]{-\frac{1}{2}\cdot II} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

b) *(3 Punkte)*
Setze die Nichtkopfvariablen $x_2 = \alpha$ und $x_4 = \beta$. Es ergibt sich $x_1 = \alpha$ und $x_2 = \beta$. Somit ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des LGS

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) *(3 Punkte)*
In Aufgabenteil a) haben wir gesehen, dass A zwei Kopfvariablen hat,
somit ist $\text{Rang}(A) = 2$.
Es ist bekannt, dass sich die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems schreiben läßt als $\mathcal{L} = y_s + \text{Kern}(A)$, wobei y_s eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist. Aus Aufgabenteil b) folgt also,

$$\text{Kern}(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle p_2x^2 + p_1x + p_0\,,\, q_2x^2 + q_1x + q_0\rangle = 3p_2q_2 + p_1q_1 + p_0q_0.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\} := \left\{x^2+1,\ x^2-2x-3,\ x^2+6x-3\right\}$$

des $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ an, um $\mathcal{B}$ in eine Orthonormalbasis bzgl. des gegebenen Skalarproduktes zu überführen.

Lösung:

- **Normieren von b_1:**

$$||\,b_1\,|| = \left|\left|\,x^2+1\,\right|\right| = \sqrt{\langle\, x^2+1, x^2+1\,\rangle} = \sqrt{3+0+1} = 2.$$

  Also ist $q_1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

- **Lot auf b_2:**

$$\begin{aligned} l_2 = b_2 - \langle\, b_2, q_1\,\rangle\, q_1 &= x^2-2x-3 - \left\langle\, x^2-2x-3, \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\,\right\rangle \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\\ &= x^2-2x-3 - \left(\frac{3}{2}+0-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right) = x^2-2x-3. \end{aligned}$$

- **Normieren von l_2:**

$$||\,l_2\,|| = \left|\left|\,x^2-2x-3\,\right|\right| = \sqrt{\langle\, x^2-2x-3, x^2-2x-3\,\rangle} = \sqrt{3+4+9} = 4.$$

  Also ist $q_2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

- **Lot auf b_3:**

$$\begin{aligned} l_3 =& b_3 - \langle\, b_3, q_1\,\rangle\, q_1 - \langle\, b_3, q_2\,\rangle\, q_2\\ =& x^2+6x-3 - \left\langle\, x^2+6x-3, \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\,\right\rangle\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\\ &- \left\langle\, x^2+6x-3, \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\,\right\rangle\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\\ =& x^2+6x-3 - \left(\frac{3}{2}+0-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\\ &- \left(\frac{3}{4}-\frac{6}{2}+\frac{9}{4}\right)\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\\ =& x^2+6x-3. \end{aligned}$$

- **Normieren von l_3:**

$$||\,l_3\,|| = \left|\left|\,x^2+6x-3\,\right|\right| = \sqrt{\langle\, x^2+6x-3, x^2+6x-3\,\rangle} = \sqrt{3+36+9} = \sqrt{48}.$$

  Also ist $q_3 = \frac{1}{\sqrt{48}}\left(x^2+6x-3\right)$.

- **ONB:**
  Die ONB ist also $\{q_1, q_2, q_3\} = \{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}, \frac{1}{\sqrt{48}}\left(x^2+6x-3\right)\}$.

3. Aufgabe 14 Punkte

Betrachten Sie die Matrizen $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes das charakteristische Polynom von B.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von B sowie die algebraische Vielfachheit zu jedem dieser Eigenwerte.

c) Die Matrix C hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2$ und $\lambda_3 = 1$. Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1,2} = 2$.

d) Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$ der Matrix C ist $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, so dass $C = SDS^{-1}$.

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = C\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösung:

a) *(3 Punkte)*
Laplace-Entwicklung nach der zweiten Spalte liefert

$$\begin{aligned} P_B = \det(B - zI) &= \det\left(\begin{bmatrix} 2-z & 0 & 3 \\ 5 & -z & -2 \\ 1 & 0 & 4-z \end{bmatrix}\right) = +(-z) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 2-z & 3 \\ 1 & 4-z \end{bmatrix}\right) \\ &= (-z) \cdot [(2-z)(4-z) - 3] = (-z)(z^2 - 6z + 5) = (-z)(z-5)(z-1). \end{aligned}$$

b) *(2 Punkte)*
Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, somit

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5.$$

Da jeder Eigenwerte genau einmal vorkommt, ist die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwertes gleich eins.

c) *(4 Punkte)*
Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1,2} = 2$ ist

$$\begin{aligned} V_{\lambda=2} = \text{Kern}\,(C - 2I) &= \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

d) *(3 Punkte)*
In der Diagonalmatrix D stehen die Eigenwerte der Matrix C. Die Matrix S besteht aus den linear unabhängigen Eigenvektoren (dabei ist die Reihenfolge zu beachten), also

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) *(1 Punkt Lösung / 1 Punkt Begründung)*

Da der Anfangswert des AWP ein Vielfaches des Eigenvektoren $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 1$ ist, ist die Lösung gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)\lambda_3} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ 3e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

4. Aufgabe

7 Punkte

Die Inverse der Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ von $V = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\}$ bzgl. einer bestimmten Basis $\mathcal{B} := \{A_1, A_2, A_3\}$ ist gegeben durch

$$K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to V$$
$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & \beta + \gamma - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma - \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\mathcal{B}$.
b) Bestimmen Sie $K_{\mathcal{B}}$.

Lösung:

a) *(3 Punkte)*
Für $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ gilt: $K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{e}_i) = A_i$, wobei $\vec{e}_i$, der i-te Standardbasisvektor der $\mathbb{R}^3$ ist, $i = 1, 2, 3$.
Also ist $A_1 = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $A_2 = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und
$A_3 = K_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) *(4 Punkte)*
Für $K_{\mathcal{B}}$ gilt: $K_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$,

wobei $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & \beta + \gamma - \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \gamma - \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$.

Mit Koeffizientenvergleich erhält man die EKM

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & 0 & a \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & b \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{NZSF} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & a+c \end{array}\right].$$

Somit ist

$$K_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2a \\ b-c \\ a+c \end{bmatrix}.$$

(**Bemerkung**: Aufgabenteil b) kann auch ohne Aufgabenteil a) gelöst werden.)