Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
O. Holtz / M. v. Renesse / K. Roegner

SS09
7.10.2009

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

1. Aufgabe

11 Punkte

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$ definiert eine Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.

a) Bestimmen Sie m und n.

b) Die NZSF (normierte Zeilenstufenform) von A hat keine Nullzeile. Ist die Matrixabbildung injektiv/ surjektiv/ bijektiv?

c) Bilden die Spalten von A ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

d) Bilden die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

a) *(2 Punkte)*
Die Matrix A ist eine 3×4-Matrix, somit ist $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^{4,1}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^{3,1}$. Also gilt für die Matrixabbilung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Folglich ist $m = 4$ und $n = 3$.

b) *(5 Punkte)*

- *injektiv:*
  Mit der Dimensionsformel gilt:
  $$4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Bild}(A)) + \dim(\mathrm{Kern}(A)) \leq 3 + \dim(\mathrm{Kern}(A)).$$
  Also erhält man:
  $$\dim(\mathrm{Kern}(A)) \geq 1, \text{ insbesondere}\,\mathrm{Kern}(A) \neq \{0\}.$$
  Also ist A **nicht injektiv**.
- *surjektiv:*
  Da die NZSF von A keine Nullzeilen enthält, hat die NZSF von A drei Köpfe, somit ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$. Es gilt
  $$\dim(\mathrm{Bild}(A)) = \mathrm{Rang}(A) = 3 \text{ und } \mathrm{Bild}(A) \subseteq \mathbb{R}^3.$$
  Somit folgt $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$, also ist **surjektiv**.
- *bijektiv:*
  Damit A bijektiv wäre, müsste A surjektiv **und** injektiv sein. Da A nicht injektiv ist, ist A auch **nicht bijektiv**.

c) *(2 Punkte)*
Die Spalten von A bilden ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$, da A surjektiv ist und somit $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$.

d) *(2 Punkte)*
Die Spalten von A bilden keine Basis des $\mathbb{R}^3$, da eine Basis des $\mathbb{R}^3$ genau drei Elemente besitzt.

2. Aufgabe

10 Punkte

Sei $V = \{B \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, B \text{ ist eine obere Dreiecksmatrix}\}$. Die lineare Abbildung $L : V \to V$ bildet die Basiselemente von $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ folgendermaßen ab:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie zwei verschiedene Elemente im Kern(L).

b) Bestimmen Sie zwei verschiedene Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von L.

Lösung:

a) *(5 Punkte)*
Da L eine lineare Abbildung ist, gilt $L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, also ist $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$. Ausserdem ist

$$L\left(\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 5L\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Also ist auch $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$ bzw. alle Vielfachen $\lambda \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(L)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) *(5 Punkte)*
Aus der 2.Rechung aus Aufgabenteil a) folgt, dass 0 ein Eigenwert von L ist und ein zugehörige Eigenvektor durch $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben ist, da

$$L\left(\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aus einem der Bilder

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = -5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\left(\text{bzw. } L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = -5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

folgt, dass $\lambda = -5$ ein Eigenwert von L ist. Ein zugehöriger Eigenvektor ist z.B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (oder auch $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

3. Aufgabe

10 Punkte

Die QR-Zerlegung der Matrix $C \in \mathbb{R}^{3,3}$ sei

$$Q = [\vec{q}_1 \ \ \vec{q}_2 \ \ \vec{q}_3] = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 5 & 5 & \alpha \\ 0 & -5 & \beta \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

wobei $\vec{q}_i$ die i-te Spalte von Q für $i = 1, 2, 3$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie $\langle 3\vec{q}_1 - 4\vec{q}_2 \,,\, \vec{q}_3 \rangle$, $\langle 3\vec{q}_1 - 4\vec{q}_2 \,,\, \vec{q}_2 \rangle$ bzgl. des Standardskalarproduktes $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ des $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie $|\det(C)|$, also den Betrag der Determinante der Matrix C.

c) Bestimmen Sie $Q^T C$.

d) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor des 1. Spaltenvektors von C bzgl. der Basis $\mathcal{B}_Q = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

a) *(4 Punkte)*

Da Q orthogonal ist, bilden $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, also gilt $\langle \vec{q}_i \,,\, \vec{q}_j \rangle = \begin{cases} 0\,, & i \neq j \\ 1\,, & i = j \end{cases}$.

Somit erhält man

$$\langle 3\vec{q}_1 - 4\vec{q}_2 \,,\, \vec{q}_3 \rangle = 3 \underbrace{\langle \vec{q}_1 \,,\, \vec{q}_3 \rangle}_{=0} - 4 \underbrace{\langle \vec{q}_2 \,,\, \vec{q}_3 \rangle}_{=0} = 0$$

$$\langle 3\vec{q}_1 - 4\vec{q}_2 \,,\, \vec{q}_2 \rangle = 3 \underbrace{\langle \vec{q}_1 \,,\, \vec{q}_2 \rangle}_{=0} - 4 \underbrace{\langle \vec{q}_2 \,,\, \vec{q}_2 \rangle}_{=1} = -4.$$

b) *(2 Punkte)*

Da R eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt $\det(R) = 5 \cdot (-5) \cdot (-3) = 75$. Mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt:

$|\det(C)| = |\det(QR)| = |\det(Q)\det(R)| = \underbrace{|\det(Q)|}_{=1} |\det(R)| = 75.$

(Q orthogonal $\Rightarrow |\det(Q)| = +1$.)

c) *(2 Punkte)*

Es gilt, da Q orthogonal ist:

$Q^T C = Q^{-1} C = Q^{-1}(QR) = \underbrace{(Q^{-1}Q)}_{=I} R = R.$

d) *(2 Punkte)*

Berechne die 1.Spalte von C:

$$C = QR = \begin{bmatrix} 4 & * & * \\ 0 & * & * \\ 3 & * & * \end{bmatrix}.$$

Sei $K_Q \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. Da $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ eine ONB bildet, gilt

$a_i = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \,,\, \vec{q}_i \right\rangle$, $i = 1, 2, 3$. Somit ist $K_Q \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Aufgabe

9 Punkte

Bestimmen Sie, ob die folgenden Mengen M_i Teilräume der Vektorräume V_i sind ($i = 1, 2, 3$).

- $M_1 := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\}$, $V_1 = \mathbb{R}^2$.
- $M_2 := \{ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \mid ax + b = bx + a\}$, $V_2 = \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$.
- $M_3 := \{A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid \det(A) = 0\}$, $V_3 = \mathbb{R}^{2,2}$.

Lösung:

a) *(2 Punkte)*
M_1 ist kein Teilraum. Denn $\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}$ ist für $\vec{x} = \vec{0}$ nicht definiert und somit ist $\vec{0} \notin M_1$.

b) *(4 Punkte)*
M_2 ist ein Teilraum, überprüfe die Teilraumeigenschaften.
Seien $a_1x + b_1, a_2x + b_2 \in M_2$, d.h. $a_1x + b_1 = b_1x + a_1$, $a_2x + b_2 = b_2x + a_2$. Weiter sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

- $M_2 \neq \emptyset$, da $0x + 0 \in M_2$.
- $(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2) = (a_1x + b_1) + (a_2x + b_2) = (b_1x + a_1) + (b_2x + a_2) = (b_1 + b_2)x + (a_1 + a_2)$.
  Also ist $(a_1x + b_1) + (a_2x + b_2) \in M_2$.
- $\lambda a_1x + \lambda b_1 = \lambda(a_1x + b_1) = \lambda(b_1x + a_1) = \lambda b_1x + \lambda a_1$.
  Also ist $\lambda(a_1x + b_1) \in M_2$.

c) *(3 Punkte)*
M_3 ist kein Teilraum. Betrachte folgendes Gegenbeispiel. Seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und
$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dann ist $\det(A) = \det(B) = 0$, also $A, B \in M_3$.
Jedoch ist $\det(A + B) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$. Also ist $A + B \notin M_3$.