Lösung zur Februar-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Variante A

---

1. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei $A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 9 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ sowie $\vec{b} := \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix zu dem zugehörigen linearen Gleichungssystem (LGS) $A\vec{x} = \vec{b}$ auf, und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$.

c) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A.

d) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

---

a) **(4 Punkte)**

Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 9 & -8 & -2 \end{array}\right]$

Normierte Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 9 & -8 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -8 & -6 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -9 & -9 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

b) **(2 Punkte)**

x_1, x_3, x_4 sind Kopfvariablen, x_2 und x_4 sind Nicht-Kopfvariablen. x_2 und x_4 sind also frei wählbar, etwa $x_2 = s$, $x_4 = t$. Damit ergibt sich für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 6 - \frac{2}{3}t + 2s \\ s \\ 1 - \frac{1}{3}t \\ -1 + t \\ t \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) **(2 Punkte)**

Der Kern ist die Lösungsmenge des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$, die sich aus b) ablesen lässt. Man erhält

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Kern}(A)} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

als Basis des Kerns.

d) **(2 Punkte)**
Die Spalten, in denen in der NZSF von A Kopfvariablen stehen, bilden eine Basis des Bildes von A. Also ist

$$\mathcal{B}_{\text{Bild}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis des Bildes.

---

2. Aufgabe 7 Punkte

Gegeben ist das folgende Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + 2\, a_2 b_2 + 2\, a_3 b_3 + a_4 b_4$$

Orthonormieren Sie folgende Matrizen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Normieren von M_1:

$$\|M_1\| = \sqrt{\langle M_1, M_1 \rangle} = \sqrt{0^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot (-2)^2 + 0^2} = 4$$

$$A_1 = \frac{1}{\|M_1\|} M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Das Lot von M_2 auf die von A_1 aufgespannte Gerade fällen:

$$\tilde{A}_2 = M_2 - \langle A_1, M_2 \rangle A_1 = M_2 - 2A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Normieren von $\tilde{A}_2$:

$$A_2 = \frac{1}{\|\tilde{A}_2\|} \tilde{A}_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tilde{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A_1 und A_2 sind die durch das Gram-Schmidt-Verfahren orthonormierten Matrizen von M_1 und M_2.

3. Aufgabe

12 Punkte

Es sei $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren zu A sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

b) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalisierung von A an, d.h., finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, so dass $A = SDS^{-1}$.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t)$ mit $\vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) **(3 Punkte)**
Es gilt

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$A \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Also sind $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren zum Eigenwert 4 und $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 0.

(b) **(4 Punkte)**
Die beiden Eigenvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert 4 sind linear unabhängig, also ist die geometrische Vielfachheit von 4 mindestens 2, die geometrische Vielfachheit von 0 ist mindestens 1. Da die Summe aller geometrischen Vielfachheiten höchstens drei sein kann, muss die geometrische VFH von 4 zwei sein und die von 0 muss 1 sein. Da die Summe aller geometrischen Vielfachheiten gleich die Dimension von $\mathbb{C}^3$ ist, existiert eine Basis von Eigenvektoren, also ist A diagonalisierbar. Ist D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen und S die Matrix mit den Eigenvektoren als Spalten, so gilt $A = SDS^{-1}$. Also mit $S = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ist eine Diagonalisierung von A gegeben.

(c) **(5 Punkte)**
Alternative 1:

Die Formel für die Lösung eines AWP lautet $\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 = Se^{(t-2)D}S^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, mit S und D wie in b).

Berechnung S^{-1} mit Gauss-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Also $S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{4(t-2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4(t-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{4(t-2)} & -2e^{4(t-2)} & 0 \\ 0 & e^{4(t-2)} & -1 \\ e^{4(t-2)} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{4(t-2)} \\ -e^{4(t-2)}+1 \\ e^{4(t-2)}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{4(t-2)}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Alternative 2: Die Vektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bilden eine Basis von Eigenvektoren des $\mathbb{R}^3$ und somit kann $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ als Linearkombination dieser drei Vektoren geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Man kommt auf folgendes LGS

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] ,$$

woraus man als Lösung $\lambda_3 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_1 = 1$ erhält.Damit erhält man

$$\vec{y}(t) = 1\cdot e^{4(t-2)}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\cdot e^{4(t-2)}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\cdot e^{0(t-2)}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{4(t-2)}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

4. Aufgabe

11 Punkte

Betrachten Sie den Vektorraum $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ der Polynome höchstens zweiten Grades mit der Basis

$$\mathcal{C} := \{c_1(x) = x^2 + x + 1, c_2(x) = x + 1, c_3(x) = 1\}$$

und die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], p(x) \mapsto x(x+2)p''(x)$$

a) Berechnen Sie die Koordinatenabbildung $K_\mathcal{C}$ von V bzgl. der Basis $\mathcal{C}$.

b) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_\mathcal{C}$ der linearen Abbildung L bzgl. der Basis $\mathcal{C}$.

c) Bestimmen Sie Kern(L) und dim(Kern(L)).

(a) **(3 Punkte)**
Ansatz: Gegeben $ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_{\le 2}[x]$. Gesucht $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$ax^2+bx+c = \lambda_1(x^2+x+1)+\lambda_2(x+1)+\lambda_3\cdot 1 = \lambda_1 x^2+(\lambda_1+\lambda_2)x+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{rlcl} I & \lambda_1 = a & & \\ II & \lambda_1+\lambda_2 = b & \underset{\text{II-I}}{\Rightarrow} & \lambda_2 = b-a \\ III & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = c & \underset{\text{III-II}}{\Rightarrow} & \lambda_3 = c-b \end{array}$$

Also lautet die Koordinatenabbildung

$$\mathcal{K}_\mathcal{C} : V \to \mathbb{R}^3, ax^2+bx+c \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b-a \\ c-b \end{bmatrix}$$

(b) **(5 Punkte)**
Benutze den Algorithmus aus dem Skript:
Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{array}{lclcl} L(x^2+x+1) & = & x(x+2)\cdot 2 & = & 2x^2+4x \\ L(x+1) & = & x(x+2)\cdot 0 & = & 0 \\ L(1) & = & x(x+2)\cdot 0 & = & 0 \end{array}$$

Koordinaten:

$$\mathcal{K}_\mathcal{C}(2x^2+4x) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_\mathcal{C}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die darstellende Matrix $L_\mathcal{C}$ ergibt sich aus den Koordinatenvektoren als Spalten:

$$L_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) **(3 Punkte)**
Bringe $L_\mathcal{C}$ auf normierte Zeilenstufenform:

$$L_\mathcal{C} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hier lässt sich $\text{Kern}(L_\mathcal{C}) = \text{span}\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ ablesen. Damit ergibt sich

$$\text{Kern}(L) = \text{span}\{K_\mathcal{C}^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}), K_\mathcal{C}^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})\} = \text{span}\{x+1, 1\} \quad .$$

Es ist weiter $\dim \text{Kern}(L) = \dim \text{Kern}(L_\mathcal{C}) = 2$.