

**Lösung zur Februar-Klausur (Rechenteil)**  
**Lineare Algebra für Ingenieure**  
**Variante B**

---

**1. Aufgabe**

10 Punkte

Gegeben sei  $A := \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$  sowie  $\vec{b} := \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

- a) Stellen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix zu dem zugehörigen linearen Gleichungssystem (LGS)  $A\vec{x} = \vec{b}$  auf, und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform.
  - b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS  $A\vec{x} = \vec{b}$ .
  - c) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von  $A$ .
  - d) Bestimmen Sie eine Basis von  $\text{Bild}(A)$ .
- 

a) (4 Punkte)

Erweiterte Koeffizientenmatrix:  $\left[ \begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -8 & -4 \end{array} \right]$

Normierte Zeilenstufenform mit Gauss-Algorithmus

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & 9 & -8 & -4 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -8 & -12 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -9 & -18 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

b) (2 Punkte)

$x_1, x_3, x_4$  sind Kopfvariablen,  $x_2$  und  $x_4$  sind Nicht-Kopfvariablen.  $x_2$  und  $x_4$  sind also frei wählbar, etwa  $x_2 = s$ ,  $x_4 = t$ . Damit ergibt sich für die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left[ \begin{array}{c} 6 - \frac{1}{3}t + 2s \\ s \\ 2 - \frac{1}{3}t \\ -2 + t \\ t \end{array} \right] \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) (2 Punkte)

Der Kern ist die Lösungsmenge des homogenen Systems  $A\vec{x} = \vec{0}$ , die sich aus b) ablesen lässt. Man erhält

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}(A)} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

als Basis des Kerns.

d) (2 Punkte)

Die Spalten, in denen in der NZSF von  $A$  Kopfvariablen stehen, bilden eine Basis des Bildes von  $A$ . Also ist

$$\mathcal{B}_{\text{Bild}(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis des Bildes.

---

**2. Aufgabe**

7 Punkte

Gegeben ist das folgende Skalarprodukt im Vektorraum  $\mathbb{R}^{2,2}$ :

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + 2 a_3 b_3 + a_4 b_4$$

Orthonormieren Sie folgende Matrizen mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

---

Normieren von  $M_1$ :

$$\|M_1\| = \sqrt{\langle M_1, M_1 \rangle} = \sqrt{0^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot (-3)^2 + 0^2} = 6$$

$$A_1 = \frac{1}{\|M_1\|} M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Das Lot von  $M_2$  auf die von  $A_1$  aufgespannte Gerade fällen:

$$\tilde{A}_2 = M_2 - \langle A_1, M_2 \rangle A_1 = M_2 - 2A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Normieren von  $\tilde{A}_2$ :

$$A_2 = \frac{1}{\|\tilde{A}_2\|} \tilde{A}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \tilde{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_1$  und  $A_2$  sind die durch das Gram-Schmidt-Verfahren orthonormierten Matrizen von  $M_1$  und  $M_2$ .

---

**3. Aufgabe**

12 Punkte

Es sei  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  und  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  Eigenvektoren zu  $A$  sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

b) Zeigen Sie, dass  $A$  diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalisierung von  $A$  an, d.h., finden Sie eine Diagonalmatrix  $D$  und eine invertierbare Matrix  $S$ , so dass  $A = SDS^{-1}$ .

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem  $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t)$  mit  $\vec{y}(5) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

(a) **(3 Punkte)**

Es gilt

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Also sind  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  und  $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  Eigenvektoren zum Eigenwert 4 und  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  Eigenvektor zum Eigenwert 0.

(b) **(4 Punkte)**

Die beiden Eigenvektoren  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  und  $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  zum Eigenwert 4 sind linear unabhängig,

also ist die geometrische Vielfachheit von 4 mindestens 2, die geometrische Vielfachheit von 0 ist mindestens 1. Da die Summe aller geometrischen Vielfachheiten höchstens drei sein kann, muss die geometrische VFH von 4 zwei sein und die von 0 muss 1 sein. Da die Summe aller geometrischen Vielfachheiten gleich die Dimension von  $\mathbb{C}^3$  ist, existiert eine Basis von Eigenvektoren, also ist  $A$  diagonalisierbar. Ist  $D$  eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Diagonalen und  $S$  die Matrix mit den Eigenvektoren als

Spalten, so gilt  $A = SDS^{-1}$ . Also mit  $S = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  und  $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ist

eine Diagonalisierung von  $A$  gegeben.

(c) **(5 Punkte)**

*Alternative 1:*

Die Formel für die Lösung eines AWP lautet  $\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 = Se^{(t-5)D}S^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

mit  $S$  und  $D$  wie in b).

Berechnung  $S^{-1}$  mit Gauss-Algorithmus:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Also  $S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4(t-5)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4(t-5)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2e^{4(t-5)} & 0 \\ e^{4(t-5)} & 2e^{4(t-5)} & 1 \\ e^{4(t-5)} & e^{4(t-5)} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8e^{4(t-5)} \\ 6e^{4(t-5)} - 8e^{4(t-5)} + 2 \\ 6e^{4(t-5)} - 4e^{4(t-5)} - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + e^{4(t-5)} \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Alternative 2:* Die Vektoren  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  bilden eine Basis von Eigenvektoren des  $\mathbb{R}^3$  und somit kann  $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  als Linearkombination dieser drei Vektoren geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Man kommt auf folgendes LGS

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 8 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array} \right],$$

woraus man als Lösung  $\lambda_3 = 2, \lambda_2 = -4, \lambda_1 = 6$  erhält. Damit erhält man

$$\vec{y}(t) = 6 \cdot e^{4(t-5)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-4) \cdot e^{4(t-5)} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot e^{0(t-5)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + e^{4(t-5)} \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

#### 4. Aufgabe

11 Punkte

Betrachten Sie den Vektorraum  $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$  der Polynome höchstens zweiten Grades mit der Basis

$$\mathcal{C} := \{c_1(x) = x^2 + x + 1, c_2(x) = x + 1, c_3(x) = 1\}$$

und die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x], p(x) \mapsto x(x+3)p''(x)$$

- Berechnen Sie die Koordinatenabbildung  $K_{\mathcal{C}}$  von  $V$  bzgl. der Basis  $\mathcal{C}$ .
- Berechnen Sie die darstellende Matrix  $L_{\mathcal{C}}$  der linearen Abbildung  $L$  bzgl. der Basis  $\mathcal{C}$ .
- Bestimmen Sie  $\text{Kern}(L)$  und  $\dim(\text{Kern}(L))$ .

(a) **(3 Punkte)**

Ansatz: Gegeben  $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ . Gesucht  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  mit

$$ax^2 + bx + c = \lambda_1(x^2 + x + 1) + \lambda_2(x + 1) + \lambda_3 \cdot 1 = \lambda_1 x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{ll} I & \lambda_1 = a \\ II & \lambda_1 + \lambda_2 = b \quad \xrightarrow{II-I} \quad \lambda_2 = b - a \\ III & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = c \quad \xrightarrow{III-II} \quad \lambda_3 = c - b \end{array}$$

Also lautet die Koordinatenabbildung

$$\mathcal{K}_{\mathcal{C}} : V \rightarrow \mathbb{R}^3, ax^2 + bx + c \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b - a \\ c - b \end{bmatrix}$$

(b) **(5 Punkte)**

Benutze den Algorithmus aus dem Skript:

Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{array}{lll} L(x^2 + x + 1) & = & x(x + 3) \cdot 2 = 2x^2 + 6x \\ L(x + 1) & = & x(x + 3) \cdot 0 = 0 \\ L(1) & = & x(x + 3) \cdot 0 = 0 \end{array}$$

Koordinaten:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(2x^2 + 6x) & = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \\ \mathcal{K}_{\mathcal{C}}(0) & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Die darstellende Matrix  $L_{\mathcal{C}}$  ergibt sich aus den Koordinatenvektoren als Spalten:

$$L_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) **(3 Punkte)**

Bringe  $L_{\mathcal{C}}$  auf normierte Zeilenstufenform:

$$L_{\mathcal{C}} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hier lässt sich  $\text{Kern}(L_{\mathcal{C}}) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  ablesen. Damit ergibt sich

$$\text{Kern}(L) = \text{span}\left\{ K_{\mathcal{C}}^{-1}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), K_{\mathcal{C}}^{-1}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right\} = \text{span}\{x + 1, 1\}.$$

Es ist weiter  $\dim \text{Kern}(L) = \dim \text{Kern}(L_{\mathcal{C}}) = 2$ .