Lösung zur April-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

1. Aufgabe

11 Punkte

Untersuchen Sie bei den folgenden Abbildungen, ob sie linear sind. Geben Sie im Falle der Linearität die Dimension des Bildes an:

a) $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \mapsto \det \begin{bmatrix} 1+a & 2 \\ 2 & 4-a \end{bmatrix}$

b) $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2,2}, a \mapsto \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{bmatrix}$

c) $N : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(I + A)$

---

a) **(2 Punkte)**
Es gilt $L(a) = (1 + a)(4 - a) - 4 = 3a - a^2$. L ist nicht linear **(1 Punkt)**, da L z.B. nicht verträglich bezüglich skalarer Multiplikation ist, denn es gilt beispielsweise $L(1) = 2$ und $L(2) = 2 \neq 4 = 2 \cdot L(1)$. **(1 Punkt)**

b) **(7 Punkte)**
Punktabzug, falls

- das Wort "abgeschlossen" fällt
- nicht deutlich gemacht wird, dass für alle $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ etwas gezeigt werden soll
- wenn nicht die Gleichung $M(a + b) = M(a) + M(b)$, bzw. $M(\lambda a) = \lambda M(a)$ irgendwo steht

M ist linear **(1 Punkt)**, denn :

1) M ist verträglich bzgl. Addition: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$M(a+b) = \begin{bmatrix} a+b & 2(a+b) \\ 3(a+b) & 4(a+b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 2b \\ 3b & 4b \end{bmatrix} = M(a)+M(b).(\textbf{2 Punkte})$$

2) M ist verträglich bezüglich skalarer Multiplikation: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$M(\lambda a) = \begin{bmatrix} \lambda a & 2\lambda a \\ 3\lambda a & 4\lambda a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{bmatrix} = \lambda M(a).(\textbf{2 Punkte})$$

Da der Urbildraum von M eindimensional ist, ist nach Dimensionssatz die Dimension des Bildes von M höchstens eins.**(1 Punkt)**Da aber mit $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = M(1)$ eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix im Bild von M liegt, ist Bild(M) 1-dimensional. **(1 Punkt)**

c) **(2 Punkte)**
N ist nicht linear **(1 Punkt)**, da $N(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \det(I) = 1 \neq 0$.**(1 Punkt)**

---

2. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und den Vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Gegeben sei außerdem die lineare Abbildung

$$P \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{a}$ ein Eigenvektor von P ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
b) Zeigen Sie, dass 1 Eigenwert von P ist und zeigen Sie, dass der zugehörige Eigenraum $V_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ ist.
c) Bestimmen Sie $\dim V_1$.
d) Geben Sie alle Eigenwerte von P an.

---

a) **(2 Punkte)**
Es gilt $P(\vec{a}) = \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \vec{a} = \vec{a} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})\vec{a} = \vec{0}$. **(1 Punkt)**$\vec{a}$ ist also Eigenvektor zum Eigenwert 0. **(1 Punkt)**

b) **(3 Punkte)**
Sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0$. Dann gilt $P(\vec{x}) = \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} = \vec{x}$, also $\vec{x}$ Eigenvektor von P mit Eigenwert 1. **(1 Punkt)**Also gilt $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\} \subseteq V_1$. Sei andererseits $\vec{y}$ Eigenvektor von P zum Eigenwert 1, also $P(\vec{y}) = \vec{y}$. Das bedeutet $\langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \vec{a} = \vec{0}$, also $\langle \vec{y}, \vec{a} \rangle = 0$. **(2 Punkte)**

c) **(3 Punkte)**
Da die Summe aller geometrischen Vielfachheiten von den Eigenwerten von P höchstens drei sein kann und wir mindestens 2 paarweise verschiedene Eigenwerte haben, muss $\dim V_1 \leq 2$ gelten. **(1 Punkt)**Mit b) gilt $V_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$. Mit $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ sind zwei linear unabhängige Vektoren von V_1 gegeben. **(2 Punkte)** (Wenn man das nicht sieht, muss man halt die Gleichung $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + 0x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = 0$ lösen.)

d) **(2 Punkte)**
Die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte 1 und 0 ist $2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ **(1 Punkt)**, also kann es nicht mehr Eigenwerte als 1 und 0 geben, also die Menge aller Eigenwerte von P ist $\{0, 1\}$.**(1 Punkt)**

alternativ:

$$P(\vec{x}) = \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \textbf{(1 Punkt)}$$

Wir können also die lineare Abbildung P auffassen als Matrix $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. **(1 Punkt)**

a)

$$P\vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

also ist $\vec{a}$ Eigenvektor zum Eigenwert 0.**(1 Punkt)**
b) + c) Der Eigenraum V_1 ist gegeben durch

$$V_1 = \text{Kern}(A - 1 \cdot I) = \text{Kern}(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}) = \text{Kern}(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})\textbf{(1 Punkt)},$$

woran man ablesen kann $V_1 = \text{span}\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. **(1 Punkt)**Also ist $\dim V_1 = 2$.**(1 Punkt)**
Noch zu zeigen ist, dass $V_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$. Wenn $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0$, so folgt $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = 0$,

also x_2 beliebig und $x_1 = -x_3$. Also $\vec{x} \in V_1$. **(1 Punkt)**Ist andererseits $\vec{x} \in V_1$, also $\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ für $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, so gilt $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} x_3 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_3 = 0$.**(1 Punkt)**

d) wie oben oder mit dem charakteristischen Polynom (Entwicklung nach 2. Spalte)

$$\begin{aligned} p_P(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda) \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda)((\frac{1}{2} - \lambda)^2 - \frac{1}{4}) = (1 - \lambda)(-\lambda + \lambda^2) = -\lambda(\lambda - 1)^2 (\textbf{1 Punkt}) \end{aligned}$$

Also sid die Eigenwerte 0 und 1. **(1 Punkt)**

---

3. Aufgabe

7 Punkte

Sei $Q \in \mathbb{R}^{3,3}$ eine orthogonale Matrix.

a) Berechnen Sie die euklidische Norm $\|Q \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\|$.

b) Bestimmen Sie $|\det Q^{-1}|$.

c) Bestimmen Sie $\text{Kern}(Q)$.

d) Bestimmen Sie $\text{Bild}(Q)$.

e) Seien $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ die ersten beiden Spalten von Q. Bestimmen Sie das Standardskalarprodukt von $\vec{q}_1$ und $\vec{q}_2$, also $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle$.

---

a) **(2 Punkte)**
Da Q orthogonal ist, gilt $\|Q \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\| \overset{(\textbf{1 Punkt})}{=} \|\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.**(1 Punkt)**

b) **(2 Punkte)**
Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist 1 oder -1. Damit gilt $|\det Q| = 1$. **(1 Punkt)**Weiter gilt

$$|\det Q^{-1}| \underset{Q \text{ orth.}}{=} |\det Q^T| \underset{\text{Rechenregel für det}}{=} |\det Q| = 1.(\textbf{1 Punkt})$$

c) **(1 Punkt)**
Orthogonale Matrizen sind invertierbar, also injektiv, also gilt $\text{Kern}(Q) = \{\vec{0}\}$.

d) **(1 Punkt)**
Orthogonale Matrizen sind invertierbar, also surjektiv, also gilt $\text{Bild}(Q) = \mathbb{R}^3$.

e) **(1 Punkt)**
In einer orthogonalen Matrix sind alle Spalten orthonormal bezüglich des Standardskalarprodukts, also gilt $\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle = 0$.

---

4. Aufgabe

12 Punkte

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sei $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$.

a) Bestimmen Sie alle α, β, sodass A invertierbar ist.

b) Bestimmen Sie alle α, β, sodass A diagonalisierbar ist.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{y}(t), \quad \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

---

a) **(2 Punkte)**
A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Es gilt $\det A = \alpha\beta$. **(1 Punkt)**Also ist für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ A invertierbar und sonst nicht invertierbar. **(1 Punkt)**

b) **(8 Punkte)**
A ist obere Dreiecksmatrix. Somit sind die Eigenwerte von A gegeben durch α und β **(1 Punkt)**. Wir bestimmen die Eigenräume $V_\alpha = \text{Kern}(A - \alpha I)$ und $V_\beta = \text{Kern}(A - \beta I)$.

$$A - \alpha I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta - \alpha \end{bmatrix},$$

also $V_\alpha = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ (unabhängig von α und β) **(2 Punkte)**.

$$A - \beta I = \begin{bmatrix} \alpha - \beta & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

also $V_\beta = \text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}\}$ (unabhängig von α und β) **(2 Punkte)**. Es ergeben sich zwei Fälle

1.) $\alpha = \beta$: Es gibt also nur einen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 , aber geometrischer Vielfachheit 1, also ist A nicht diagonalisierbar. **(1 Punkt)**

2.) $\alpha \neq \beta$: A hat also zwei verschiedene Eigenwerte, damit ist die algebraische Vielfachheit jeweils gleich der geometrischen Vielfachheit gleich 1, also ist A diagonalisierbar.**(1 Punkt)**

Für $\alpha \neq \beta$ ist A diagonalisierbar, sonst nicht. **(1 Punkt)**

c) **(2 Punkte)**
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist Eigenvektor von $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ zum Eigenwert 2: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. **(1 Punkt)**Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{2(t-2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2(t-2)} \\ 0 \end{bmatrix} \text{(\textbf{1 Punkt})}$$