Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 10/11

A. Bley/A. Fügenschuh/R. Nabben/E. Nava Yazdani/C. Schröder 23.02.2011

Februar – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure
Lösungsskizze

---

1. Aufgabe
13 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$.

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform von A.

(b) A definiert eine Matrixabbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$. Bestimmen Sie m und n.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(A)$ und eine Basis von $\mathrm{Kern}(A)$.

(d) Ist A injektiv/surjektiv/bijektiv?

(e) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass $\begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Bild}(A)$ ist.

(a) **(3 Punkte)** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}+2\mathrm{II}]{\mathrm{I}-2\mathrm{III}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}+\mathrm{III}]{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{4}\mathrm{II}]{\mathrm{I}+\frac{1}{4}\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) **(1 Punkte)** Aus der Anzahl der Zeilen und Spalten von A (bzw. aus der Matrixmultiplikation) folgt $m = 4$ und $n = 3$.

(c) **(4 Punkte)** Da in der ersten und dritten Spalte der NZSF(A) die Köpfe stehen, bilden die erste und dritte Spalte von A eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.
Also ist $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
Aus der NZSF(A) folgt, dass x_1, x_3 Kopfvariablen sind. Kopfvariablen als Linearkombination der Nichtkopfvariablen (x_2, x_4) darstellen: $x_1 = -2x_2 + x_4$ und $x_3 = x_4$.
1. Basisvektor (setze $x_2 = 1$, $x_4 = 0$): $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 2. Basisvektor (setze $x_2 = 0$, $x_4 = 1$): $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Basis}(\mathrm{Kern}(A)) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) **(3 Punkte)** A ist nicht injektiv, da nach (c) $\dim(\mathrm{Kern}(A)) = 2 \neq 0$ (bzw. $\mathrm{Kern}(A) \neq \{\vec{0}\}$). A ist nicht surjektiv, da nach Dimensionsatz $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Kern}(A)) = 4 - 2 = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. A ist nicht bijektiv, da weder injektiv noch surjektiv.

(e) **(2 Punkte)** $\begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Bild}(A)$, falls $\begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ eine Linearkombination der Spalten von A ist. Für $\alpha = 0$ ist $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (vierte Spalte von A). Also $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Bild}(A)$.

---

2. Aufgabe
12 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{v}_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

(a) Wählen Sie $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ so, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ aus $\mathcal{B}$ mit dem in (a) gewählten $\vec{v}_3$.

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\vec{w} := \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$.

(a) **(3 Punkte)**

Wähle $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\mathcal{B}$ ist eine Basis, da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ und $\mathcal{B}$ aus 3 linear unabhängigen Vektoren besteht:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ einzige Lösung}$$

(b) **(7 Punkte)**

$\vec{q}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, da $\vec{v}_1$ bereits normiert ($\|\vec{v}_1\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1$)

$$\vec{l}_2 = \vec{v}_2 - < \vec{v}_2, \vec{q}_1 > \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \underbrace{< \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} >}_{=0} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{l}_2\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\ , \qquad \vec{q}_2 = \frac{\vec{l}_2}{\|\vec{l}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{l}_3 &= \vec{v}_3 - < \vec{v}_3, \vec{q}_1 > \vec{q}_1 - < \vec{v}_3, \vec{q}_2 > \vec{q}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \underbrace{< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} >}_{=0} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - < \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} > \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \underbrace{< \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} >}_{=2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\|\vec{l}_3\| = \sqrt{(\tfrac{1}{5})^2 + 0^2 + (\tfrac{2}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{1}{5}}\ , \qquad \vec{q}_3 = \frac{\vec{l}_3}{\|\vec{l}_3\|} = \sqrt{5} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) **(2 Punkte)** $Q = [\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3]$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{ONB}}} = Q^T \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

---

3. Aufgabe

9 Punkte

Die Matrix $C \in \mathbb{R}^{3,3}$ besitzt die Eigenwerte $0, 4, -1$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Ist C invertierbar?

(b) Ist C diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie $C \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = C\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) **(2 Punkte)** Da 0 ein Eigenwert von C ist, ist C nicht invertierbar.

(b) **(2 Punkte)** Das char. Polynom von $C \in \mathbb{R}^{3,3}$ ist vom Grad 3. C hat also genau 3 Eigenwerte. Diese sind paarweise verschieden. (algVFH = geomVFH = 1 für alle Eigenwerte von C) Also ist C diagonalisierbar.

(c) **(3 Punkte)** $C\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = C\left(-2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \underset{\text{Linearität}}{=} -2\cdot C\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\cdot C\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{\text{EW}}{=} -2\cdot 0\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\cdot(-1)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

(d) **(2 Punkte)**
$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, also Eigenvektor zum Eigenwert -1. $\vec{y}(t) = e^{\lambda(t-t_0)}\vec{y}_0 = e^{-1(t-2)}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

---

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$, zwei Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ von V sowie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$:

$$\mathcal{B}_1 := \left\{x^2, x, x-2\right\},\ \mathcal{B}_2 := \left\{x+2, -x^2, x-2\right\},\ T_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Weiter sei $L_{\mathcal{B}_2}$ die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : V \to V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$:

$$L_{\mathcal{B}_2} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$ beim Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_1}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$.

(c) Bestimmen Sie $\dim(\text{Kern}(L))$ und $\text{Bild}(L)$.

(a) **(4 Punkte)** $S = T^{-1}$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[I\leftrightarrow II]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}I]{(-1)\cdot II} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[I+II]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \text{ Also } S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(b) **(2 Punkte)**

$$L_{\mathcal{B}_1} = T\cdot L_{\mathcal{B}_2}\cdot S = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}}_{=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}^{=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

(c) **(4 Punkte)**
Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind ihre Diagonalelemente. 0 ist kein Eigenwert von $L_{\mathcal{B}_2} \implies 0$ ist kein Eigenwert von $L \implies \dim(\text{Kern}(L)) = 0$.
Nach Dimensionssatz ist $\dim(\text{Bild}(L)) = \dim(V) - \dim(\text{Kern}(L)) = 3 - 0 = 3 \implies \text{Bild}(L) = V$

---

5. Aufgabe

9 Punkte

Bestimmen Sie Matrizen $D_1, D_2, D_3, D_4 \in \mathbb{R}^{2,2}$, die die entsprechenden Bedingungen erfüllen:

(a) $D_1 \neq I_2$ und das charakteristische Polynom von D_1 ist $p_{D_1}(x) = x^2 - 2x + 1$.

(b) 2 ist ein Eigenwert von D_2 mit zugehörigen Eigenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) $D_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(D_3)$.

(d) $\det(D_4) < 0$ und $\det(D_4) = \det(D_4^{13})$.

(a) **(2 Punkte)**
$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I_2$, $p_{D_1}(x) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 1-x \end{bmatrix}\right) = (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$

(b) **(2 Punkte)**
$D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, also $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ EV zum EW 2 von $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) **(3 Punkte)**
$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, also $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(D_3)$ und
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist der erste Spaltenvektor von D_3

(d) **(2 Punkte)**
$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(D_4) = -1 < 0$ und $\det(D_4^{13}) = (\det(D_4))^{13} = (-1)^{13} = -1 = \det(D_4)$

---

6. Aufgabe

7 Punkte

Überprüfen Sie, ob die Mengen M_1, M_2 Teilräume des $\mathbb{R}^{2,2}$ sind.

(a) $M_1 := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, \det(A) = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$

(b) $M_2 := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \,|\, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A) \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$

(a) **(3 Punkte)**
M_1 ist kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$, da nicht abgeschlossen bezüglich der Addition.
Gegenbsp.: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_1$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_1$, da $\det(A_1) = \det(A_2) = 0$
$A_1 + A_2 = I_2 \notin M_1$, $\det(I_2) = 1 \neq 0$

(b) **(4 Punkte)**
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$, da $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$
Also $M_2 \neq \varnothing$.
Für $A_1, A_2 \in M_2$ ist $A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$(A_1 + A_2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=\vec{0} \text{ (nach Vor.)}} + \underbrace{A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=\vec{0} \text{ (nach Vor.)}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies (A_1 + A_2) \in M_2$$

M_2 also abgeschlossen bezüglich Addition.
Für $A \in M_2, \alpha \in \mathbb{R}$ ist $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$(\alpha A) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\left(A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)}_{=\vec{0} \text{ (nach Vor.)}} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies (\alpha A) \in M_2$$

M_2 also abgeschlossen bezüglich Multiplikation mit Skalaren.
M_2 ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$.