Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 12

J. Liesen, R. Nabben, C. Schröder 16.07.2012

Juli – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und die Vektoren $\vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die normierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}_1]$.
(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}_1$.
(c) Sind die Spalten von A linear unabhängig?
(d) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(A)$ und die Dimension von $\mathrm{Bild}(A)$.
(e) Gilt $\vec{b}_1 \in \mathrm{Bild}(A)$? Gilt $\vec{b}_2 \in \mathrm{Bild}(A)$?

2. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_B von B.
(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B sowie die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten.
(c) Ist B diagonalisierbar?

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ mit $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto (a+b)x - 2b$.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(F)$.
(b) Ist F bijektiv?
(c) Ist F invertierbar? Falls F invertierbar ist, bestimmen Sie die zu F inverse Abbildung F^{-1}.

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, von der Folgendes bekannt ist:

$$G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $G_{\mathcal{B}}$ von G bzgl. der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$.
(b) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Eigenvektoren von G zu den Eigenwerten -1 bzw. -2 sind.
(c) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = G\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\rangle_s := \frac{1}{2}a_1 b_1 + \frac{1}{8}a_2 b_2 .$$

(a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ bzgl. des gegebenen Skalarprodukts $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_s$ normiert ist.
(b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, sodass $\mathcal{C} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{v} \right\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_s$ ist. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\frac{1}{17}\vec{v}$ bzgl. der Basis $\mathcal{C}$.
(c) Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{z} := \vec{y} - \frac{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle_s}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_s}\vec{x}$. Zeigen Sie unter Verwendung der Eigenschaften eines euklidischen Skalarprodukts, dass die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{z}$ orthogonal sind bzgl. $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_s$.

6. Aufgabe

8 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $M := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} | \det(A) = 1 \right\}$ kein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.
(b) Gegeben sei der Teilraum $N := \left\{ \begin{bmatrix} 2a & b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} | \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ des $\mathbb{R}^{2,2}$.

(i) Prüfen Sie, ob $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von N ist.

(ii) Prüfen Sie, ob $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von N ist.