Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13
L. Knipping, R. Nabben, R. Patterson, M. Scheutzow 20.02.2013

Februar – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Variante B

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei das folgende reelle lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ & & x_2 & + & & + & 2x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array}.$$

(a) Stellen Sie die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[\,A\,|\,\vec{b}\,]$ auf und bringen Sie diese in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(A)$ und $\mathrm{Kern}(A)$.

(d) Ist die zu A zugehörige Matrixabbildung injektiv? Ist sie surjektiv?

2. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben seien die Matrizen

$$B_1 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 := \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det(B_1)$ mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

(b) Bilden die Spalten von B_1 eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

(c) Bestimmen Sie $\det(B_2)$.

(d) Bestimmen Sie $\det(B_3)$.

3. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei die Matrix $C := \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von C.

(b) Ist C diagonalisierbar?

(c) Ist C invertierbar?

4. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben sei mit $\mathcal{B} := \{x,\, x-1\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$, sowie die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 1}[x]\ ; \quad ax + b \mapsto (2a+2b)x + (2a+2b).$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(L)$.

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(c) Ein Eigenwert von L ist 0. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor an.

(d) Sei $\mathcal{C} = \{p_1,\, p_2\}$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ und $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ die Transformationsmatrix beim Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie $\mathcal{C}$.

5. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben sei die Menge $M := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; b - d = 0 \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) M ist dreidimensional. Geben Sie eine Matrix A an, sodass $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A \right\}$ eine Basis von M ist und begründen Sie, dass $\mathcal{B}$ mit dem gewählten A eine Basis von M ist.

(c) Zeigen Sie, dass $N := \left\{ B \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; B^2 = 0 \right\}$ kein Teilraum von M ist.

6. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt und die Matrixabbildung $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. P beschreibt die Spiegelung an der Geraden $\mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Ist $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von P? Falls ja, zu welchem Eigenwert gehört er?

(b) Gibt es einen zu $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ linear unabhängigen Eigenvektor von P? Falls ja, zu welchem Eigenwert gehört er?

(c) P ist diagonalisierbar.
Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2,2}$, sodass $P = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1}$ gilt.

(d) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = P\vec{y}(t)$ für $\vec{y}_0 = \vec{y}(5) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.