Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: R. Schneider, P. Winkert
Ass.: H. Eble, B. Kutschan

Wintersemester 2017/18
19. Februar 2018

Modulprüfung
„Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(9 Punkte)**

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie A^{-1}.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des reellen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie $\text{Kern}(A)$ und $\dim(\text{Bild}(A))$.

(d) Liegt der Vektor $\vec{b}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ im Kern von A?

2. **Aufgabe** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von B.

(b) Ist B diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \qquad \vec{y}_0 = \vec{y}(-3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. **Aufgabe** **(6 Punkte)**

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$C_\alpha := \begin{pmatrix} -2 & \alpha & 0 & 3 \\ 4\alpha & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von C_α mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz (angewandt auf 4×4- und 3×3-Matrizen).

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat C_α den Eigenwert 0?

(c) Berechnen Sie die Determinante von $(C_{-1})^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) C_9^T$.

4. **Aufgabe** **(7 Punkte)**

Welche der folgenden Mengen sind Teilräume? Beweisen oder widerlegen Sie Ihre Aussagen.

(a) $S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 \leq x_2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(b) $S_2 := \left\{ B \in \mathbb{R}^{3,3} \;\middle|\; B \text{ besitzt genau drei paarweise verschiedene Eigenwerte} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{3,3}$

(c) $S_3 := \left\{ ax + b \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \;\middle|\; a + b = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$

5. Aufgabe **(9 Punkte)**

Gegeben sei der Vektorraum $V := \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{b}_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \vec{b}_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \vec{b}_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

und die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L\colon V &\longrightarrow V \\ \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} 2(a+b) & 2(a+b) \\ 3c & c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie $\dim(\mathrm{Bild}(L))$ an.

(b) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(c) Gegeben sei nun eine zweite Basis

$$\mathcal{B}' := \left\{ \vec{b}_1' := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \vec{b}_2' := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ \vec{b}_3' := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

von V. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

(d) Gilt $\det(L) = 0$?

6. Aufgabe **(6 Punkte)**

Gegeben sei der Vektorraum

$$W := \left\{ a\left(x^3 + x^2\right) + b(x+1) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq R_{\leq 3}[x]$$

zusammen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ auf W definiert durch

$$\left\langle a\left(x^3 + x^2\right) + b\,(x+1)\,, c\left(x^3 + x^2\right) + d\,(x+1) \right\rangle_W := 4ac + 4bd$$

und der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \vec{p}_1 := x^3 + x^2,\ \vec{p}_2 := x + 1 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$.

(b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $K_{\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}}(\vec{p})$ für $\vec{p} := 5\left(x^3 + x^2\right) - 6\,(x+1) \in W$ bezüglich der von Ihnen in Teil (a) berechneten Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\mathrm{ONB}}$.

(c) Sei $\alpha < 0$ beliebig. Ist die Abbildung $\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle_0 := \alpha \cdot \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle_W$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum W?

Gesamtpunktzahl: 45 Punkte