

**Modulprüfung (Lösungen (ohne Erklärungen))  
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“**

**Korrekturhinweise**

1. Nur ganze Punkte, keine Minuspunkte.
2. Bei jedem Feld “√” oder “f” vermerken. Falls das Feld leer ist, dann durchstreichen.
3. Falls bei Aufgabe 1 eine Teilaufgabe falsch ist, dann mit “f” vermerken und die richtige Lösung mit ☒ markieren.
4. **Gesamtpunktzahl** einer Aufgabe rechts neben der Aufgabe vermerken, entweder durch  $\textcircled{3}$  oder  $\textcircled{3/6}$ .
5. Gesamtpunktzahl auf dem Deckblatt bei der jeweiligen Aufgabe oben eintragen, darunter das eigene Kürzel. Falls die einzutragende Punktzahl die letzte zu korrigierende Aufgabe war, bitte auch die Gesamtpunktzahl der Klausur eintragen und auch darunter das eigene Kürzel.

**Correction notes**

1. Only full points, no minus points.
2. Mark each field “√” or “f”. If the field is empty, then cross it out.
3. If in the a sub-task exercise 1 is wrong, then mark it with “f” and mark the correct solution with ☒.
4. Mark the total points of an exercise either with  $\textcircled{3}$  or  $\textcircled{3/6}$  to the right of the exercise.
5. Mark the total points on the cover of the exercise above, under your initials. If the points to be entered are the last points to be corrected, please also enter the total points of the exam and also add your initials.

**Aufgabe 1 (Single Choice)**

**(20 Punkte)**

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: ( oder ). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus ().

(a) Die Lösungsmenge der Ungleichung  $|x + 1| \leq 3$  ist gegeben durch

- $[-4, 0[ \cup ]0, 4[$
- $[-2, 0[ \cup ]0, 2[$
- $[-4, 2]$
- $[-3, 0[ \cup ]0, 3[$

(b) Vereinfachen Sie den Ausdruck  $(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))^{15}$  so weit wie möglich.

- 1
- 1
- $\cos^3(\frac{\pi}{3}) + i \sin^3(\frac{\pi}{3})$
- $\cos^3(\frac{\pi}{3}) - i \sin^3(\frac{\pi}{3})$

(c) Welche der folgenden Aussagen über die Exponentialfunktion ist im Allgemeinen falsch?

- Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  mit  $f(x) = e^x$  ist bijektiv.
- Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  mit  $f(x) = e^x$  ist monoton wachsend.
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x+y} = e^x + e^y$

(d) Bestimmen Sie den **maximalen** Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  der rationalen Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1) \cdot (x-3)}$ ?

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$
- $D = \mathbb{R} \setminus [1, 3]$
- $D = \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R} \setminus ]1, 3[$

(e) Welche der folgenden Mengen ist eine Basis von  $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$ ?

- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(f) Welche der folgenden Matrizen aus  $\mathbb{R}^{2,3}$  ist in normierter Zeilenstufenform?

- $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) Welche der folgenden Matrizen aus  $\mathbb{R}^{3,3}$  hat Rang 3?

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(h) Gegeben sei eine Basis  $\mathcal{B}$  des  $\mathbb{R}[z]_{\leq 2}$  sowie zwei Polynome  $p, q \in \mathbb{R}[z]_{\leq 2}$  mit

$$K_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad K_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie  $K_{\mathcal{B}}(p + 2q)$ .

$K_{\mathcal{B}}(p + 2q) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$K_{\mathcal{B}}(p + 2q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$K_{\mathcal{B}}(p + 2q) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$K_{\mathcal{B}}(p + 2q)$  ist nicht berechenbar ohne die explizite Angabe der Basis  $\mathcal{B}$ .

(i) Wie lautet die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  der Gleichung  $\sin(x) \cos(x) = 0$ ?

$\mathbb{L} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{L} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{L} = \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{L} = \{\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(j) Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x < 0, \\ e^x & \text{für } x > 0 \end{cases}$ .

Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**?

$f$  ist stetig fortsetzbar mit  $f(0) = 1$ .

$f$  ist stetig fortsetzbar mit  $f(0) = 0$ .

$f$  ist stetig fortsetzbar mit  $f(0) = -1$ .

$f$  ist nicht stetig fortsetzbar.

(k) Gegeben seien zwei stetige Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**?

Die Summe der Funktionen  $f + |g|$  ist stetig.

Die Funktion  $x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{wenn } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  ist stetig.

Die Funktion  $x \mapsto \begin{cases} f(x) \cdot \sqrt{g(x)} & \text{wenn } g(x) \geq 0 \\ f(x) \cdot \sqrt{-g(x)} & \text{sonst} \end{cases}$  ist stetig.

Die Verkettung  $f \circ g$  ist stetig.

(l) Gegeben sei eine auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **richtig**?

Die Funktion  $f$  ist beliebig oft auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar.

Die Funktion  $f$  besitzt eine Umkehrfunktion  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Funktion  $f$  besitzt ein Maximum und Minimum.

Die Funktion  $f$  besitzt auf ganz  $\mathbb{R}$  eine Stammfunktion.

(m) Gegeben sei die differenzierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \ln(|x^2 - 1|)$ . Welche der folgenden Ausdrücke ist die **richtige** erste Ableitung von  $f$ ?

$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

$f'(x) = \frac{2x}{|x^2-1|}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$f'(x) = \frac{1}{|x^2-1|}$

(n) Gegeben sei eine stetige Funktion  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(-1) = -1$  und  $f(1) = 1$ . Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **richtig**?

*Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz.*

Die Gleichung  $f(x) - x = 0$  hat eine Lösung in  $] -1, 1[$ .

Die Gleichung  $f(x) + x = 0$  hat eine Lösung in  $] -1, 1[$ .

Die Gleichung  $f(x) - x^2 = 0$  hat eine Lösung in  $] -1, 1[$ .

Die Gleichung  $f(x) + x^2 = 0$  hat eine Lösung in  $] -1, 1[$ .

(o) Vereinfachen Sie den Ausdruck  $6 \sin^4(3x + \pi) + 6 \sin^2(3x + \pi) \cos^2(3x)$  so weit wie möglich.

6

$6 \sin^2(3x)$

$6 \cos^2(3x)$

$6 (\sin^4(3x + \pi) + \cos^4(3x))$

(p) Gegeben sei eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ . Welche der folgenden Rechenregeln ist im Allgemeinen **falsch**?

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = x^{n+1} + c, c \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

(q) Welche der folgenden Aussagen für die Matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$  ist **richtig**?

Die Determinante ist nicht definiert für die Matrix  $A$ .

$\det(A) = 0$

$\det(A) = -2$

$\det(A) = 2$

- (r) Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**?
- Jede Matrix ist diagonalisierbar.
  - Die Eigenwerte einer oberen Dreiecksmatrix sind genau die Werte auf der Diagonalen.
  - Eine Matrix hat den Eigenwert  $\lambda = 0$  genau dann, wenn sie invertierbar ist.
  - Die geometrische Vielfachheit ist stets größer gleich der algebraischen Vielfachheit.
- (s) Gegeben sei eine orthogonale Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**?
- $Q^T Q = I_n$
  - $\det(Q) = \pm 1$
  - $\|Q\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
  - $\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle = -\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- (t) Gegeben sei eine stetige,  $2\pi$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Fourierkoeffizienten  $a_k, b_k$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Welche Form hat das  $n$ -te Fourierpolynom von  $f$ ?
- $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt))$
  - $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$
  - $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt))$
  - $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$

**Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen)**

**(5 Punkte)**

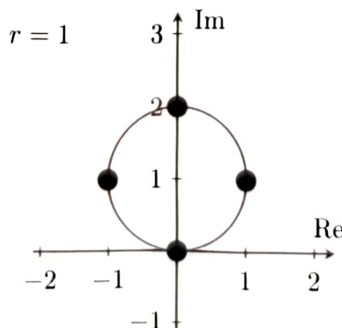
- (a) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 5 + 12i \quad \text{und} \quad z_2 = 1 - i.$$

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$|z_1|^2 = \boxed{169} \quad \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = \boxed{-7} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \boxed{\frac{17}{2}}$$

- (b) Bestimmen Sie die eindeutigen Parameter  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{C}$ , so dass die Gleichung  $(z - a)^n = 1$  die in der Abbildung als Punkte markierte Lösungsmenge besitzt. Alle markierten Punkte befinden sich auf einem Kreis mit Radius 1 um den Mittelpunkt  $i$ .



$$n = \boxed{4} \quad a = \boxed{i}$$

**Aufgabe 3 (Polynome und Rationale Funktionen)**

**(6 Punkte)**

(a) Gegeben sei die rationale Funktion  $s$  mit

$$s(z) = \frac{z + 3}{z^2 + 4z + 4}$$

Stellen Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung von  $s$  auf, wobei  $A, B \in \mathbb{R}$ .

$$s(z) = \frac{A}{z + 2} + \frac{B}{(z + 2)^2}$$

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion  $r$  mit

$$r(z) = \frac{3z - 15}{(z - 1)(z - 7)}$$

$$r(z) = \frac{2}{z - 1} + \frac{1}{z - 7}$$

(c) Gegeben seien die Polynome

$$p(z) = z^3 - 3z^2 - 9z - 5 \quad \text{und} \quad q(z) = z^2 + 2z + 1.$$

Bestimmen Sie den Grad des Polynoms  $p - q$  und bestimmen Sie das Polynom  $s = \frac{p}{q}$  mittels Polynomdivision.

$$\deg(p - q) = 3 \quad s(z) = z - 5$$

**Aufgabe 4 (Zahlenfolgen, Konvergenz und Grenzwert)**

**(7 Punkte)**

(a) Untersuchen Sie die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf Konvergenz, wobei die Folgen jeweils durch

$$a_n = \frac{2n}{2n + 1} - \frac{n^2}{4n^2 + 3}, \quad b_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}, \quad c_n = \cos(\pi n)$$

definiert sind. Bestimmen Sie jeweils die Grenzwerte, falls diese existieren und schreiben Sie **e.n.** (*existiert nicht*), falls ein Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \text{e.n.}$$

(b) Untersuchen Sie die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\frac{4n}{4n + 1} \leq a_n \leq 1$$

auf Konvergenz. Bestimmen Sie den Grenzwert, falls die Folge konvergiert und schreiben Sie **e.n.** (*existiert nicht*), falls der Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

(c) Untersuchen Sie die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$b_0 = 1 \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \frac{b_n + 6}{3}$$

auf Konvergenz. Bestimmen Sie den Grenzwert, falls die Folge konvergiert und schreiben Sie **e.n.** (existiert nicht), falls der Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \boxed{3}$$

(d) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von Bernoulli/de l'Hospital, falls diese existieren. Schreiben Sie **e.n.** (*existiert nicht*), falls der Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln(x) = \boxed{0} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x+1} = \boxed{\text{e.n.}}$$

**Aufgabe 5 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (5 Punkte)**

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{für } x < 1, \\ \frac{\sin(\pi x)}{x-1} & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Grenzwerte, falls diese existieren. Schreiben Sie **e.n.** (*existiert nicht*), falls ein Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \boxed{1} \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = \boxed{-\pi}$$

(b) Bestimmen Sie die Parameter  $a, b \in \mathbb{R}, a < 2$ , so dass die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < a, \\ \ln(x) + 1 & \text{für } a \leq x \leq 2, \\ be^{x-2} + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  ist.

$$a = \boxed{1} \quad b = \boxed{\ln(2)}$$

(c) Gegeben sei die stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{(2c+1)x} & \text{für } x < 0, \\ c \ln(x+1) + 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $f$  differenzierbar auf ganz  $\mathbb{R}$  ist.

$$c = \boxed{-1}$$

**Aufgabe 6 (Tangentensteigungen, Extrema und Taylorpolynome) (5 Punkte)**

- (a) Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 4x + 8$ . Ermitteln Sie die Steigung  $m$  der Tangente von  $f$  in  $x_0 = -1$ .

$$m = \boxed{-8}$$

- (b) Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ , welche genau ein lokales Minimum  $f(x_0)$  besitzt. Ermitteln Sie die Stelle  $x_0$  des lokalen Minimums.

$$x_0 = \boxed{2}$$

- (c) Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(1-x^2)^3}.$$

Das Taylorpolynom  $T_2(x)$  zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  ist von der Form

$$T_2(x) = a + bx + cx^2.$$

Geben Sie  $a$ ,  $b$  und  $c$  an.

$$a = \boxed{1} \quad b = \boxed{0} \quad c = \boxed{1}$$

**Aufgabe 7 (Integration)**

**(6 Punkte)**

- (a) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

$$\int_0^{\pi} (\cos(x) + x) dx = \boxed{\frac{1}{2}\pi^2}$$

- (b) Bestimmen Sie eine Konstante  $A \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = A + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx$$

gilt. *Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.*

$$A = \boxed{0}$$

(c) Gegeben sei das unbestimmte Integral

$$\int 6x \cos(x^2) dx,$$

welches mithilfe der Substitution  $t = x^2$  gelöst werden kann. Bestimmen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\int 6x \cos(x^2) dx = a \cos(x^2) + b \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$a = \boxed{0} \quad b = \boxed{3}$$

(d) Bestimmen Sie die Werte der uneigentlichen Integrale, falls diese existieren. Schreiben Sie **e.n.** (*existiert nicht*), falls ein Integral nicht existiert.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \boxed{1} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} dx = \boxed{\text{e.n.}}$$

**Aufgabe 8 (Fourierpolynom und Fourierreihe)**

**(3 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die **kleinste** Periode  $T \in \mathbb{R}$ ,  $T > 0$  der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(t) = \cos^2(t)$ .

$$T = \boxed{\pi}$$

(b) Gegeben sei die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = -\pi, \\ -1 & \text{für } -\pi < t < 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } 0 < t < \pi, \\ 0 & \text{für } t = \pi. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten  $a_1$  und  $b_1$  von  $f$ .

$$a_1 = \boxed{0} \quad b_1 = \boxed{\frac{4}{\pi}}$$

**Aufgabe 9 (Matrizen, Vektorräume und Lineare Abbildungen) (14 Punkte)**

- (a) Führen Sie den **eindeutigen** Schritt des Gauß-Eliminationsverfahrens durch, in welchem in folgender Matrix  $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{3,4}$  der Eintrag  $a_{3,1}$  eliminiert wird.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie hierzu die fehlenden Einträge  $a, b$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & a & b & 17 \end{bmatrix}$$

$$a = \boxed{8} \quad b = \boxed{11}$$

- (b) Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Die Gleichung  $A\vec{x} = \vec{b}$  hat eine eindeutige Lösung  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  mit  $\vec{x} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ .  
Berechnen Sie die Werte  $u, v \in \mathbb{R}$ .

$$u = \boxed{-1} \quad v = \boxed{-3}$$

- (c) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

$$\text{Rang}(A) = \boxed{1} \quad \text{Rang}(B) = \boxed{3}$$

- (d) Gegeben sei eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass  $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ a \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$ .

$$a = \boxed{-1} \quad b = \boxed{-2}$$

(e) Gegeben sei eine Basis  $\mathcal{B}$  des Teilraums  $V = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right\}$  mit

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Matrix  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ , welches bzgl.  $\mathcal{B}$  den Koordinatenvektor

$$K_{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

hat.

$$a = \boxed{-2} \quad b = \boxed{2} \quad c = \boxed{-8}$$

(f) Gegeben sei  $A$  mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}.$$

Bestimmen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass

$$\text{Kern}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix} \right\}.$$

$$a = \boxed{0} \quad b = \boxed{-1}$$

(g) Gegeben sei ein Teilraum  $T \subseteq \mathbb{R}[z]_{\leq 2}$  mit

$$T = \text{span} \{ 1 + z + z^2, 1 + 2z + 2z^2, 1 - z - z^2 \}.$$

Bestimmen Sie  $\dim(T)$ .

$$\dim(T) = \boxed{2}$$

**Aufgabe 10 (Determinante, Eigenwerte und Skalarprodukte)**

(9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie  $a \in \mathbb{R}$ , so dass die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & a \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

nicht invertierbar ist.

$$a = \boxed{10}$$

(b) Gegeben seien Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$  mit  $\det(A) = 3$  und  $\det(B) = \frac{1}{5}$ . Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

$$\det(A \cdot A^T \cdot B) = \boxed{\frac{9}{5}} \quad \det(3 \cdot A^{-1} \cdot B) = \boxed{\frac{3}{5}}$$

(c) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms  $p_A$  von

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

$$p_A(z) = \boxed{(5 - z) \cdot (3 - z) \cdot (-z)}$$

(d) Gegeben sei die Matrix  $A$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 3$  mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

Bestimmen Sie sowohl die geometrische Vielfachheit  $g(3)$  als auch die algebraische Vielfachheit  $a(3)$  des Eigenwerts  $\lambda_2 = 3$ .

$$a(3) = \boxed{2} \quad g(3) = \boxed{1}$$

(e) Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3,3}$  mit

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie  $a, b \in \mathbb{R}$  in der Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{3,3}$  und der invertierbaren Matrix  $S \in \mathbb{R}^{3,3}$ , so dass  $A = SDS^{-1}$  gilt.

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & b \\ -5 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$a = \boxed{-1} \quad b = \boxed{3}$$

- (f) Gegeben seien eine **orthogonale** Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{3,3}$  und  $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Bestimmen Sie die euklidische Norm  $\|Q\vec{x}\|_2$ .

$$\|Q\vec{x}\|_2 = \boxed{3}$$