P

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Penn-Karras, Bärwolff, Förster, Tröltzsch

WS 01/02
18. Februar 2002

Februar – Klausur (Rechenteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurgebnisses unter Angabe meiner Matr.–Nr. (ohne Namen) am Schwarzen Brett und im WWW.

....
Unterschrift

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die Integrale

a) $\int x\ln(x)\,dx$,

Wir lösen mittels partieller Integration:

$$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

b) Hier führt die Substitution $t = \sin(x)$ zum Ziel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\cos(x)\,dx = \int_0^1 t^4\,dt = \frac{1}{5}.$$

2. Aufgabe

5 Punkte

Stellen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ in Form einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ dar. Für welche x ist diese Potenzreihe konvergent? Wir benutzen die Formel für die geometrische Reihe und erhalten $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ (mit $q = x^2$). Diese ist konvergent für $|q| < 1$ also für $|x^2| < 1$. Somit konvergiert die Potenzreihe für $|x| < 1$ oder $x \in]-1,1[$.

3. Aufgabe

5 Punkte

Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Wir benutzen die Regel von l' Hospital zweimal

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. Aufgabe

5 Punkte

Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{4n^2+n+7}}{\sqrt{9n^2+1}}$.

Wir klammern die höchste Potenz von n in Zähler und Nenner aus und berechnen so den Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{4n^2+n+7}}{\sqrt{9n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}})}{n\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1+2}{3} = 1$$

5. Aufgabe

8 Punkte

Untersuchen Sie die beiden folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$,

Wir benutzen das Quotientenkriteriums

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

und erhalten somit die Konvergenz der Reihe.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4n+3}$.

Hier wenden wir das Leibnizkriteriums an. Der Ausdruck $(-1)^n \frac{5}{4n+3}$ alterniert. Außerdem ist $\frac{5}{4n+3}$ eine monotone Nullfolge. Somit konvergiert die Reihe nach Leibniz.

6. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -4$ und stellen Sie diese in der Form $x + iy$ dar.

Nach der Umwandlung in Polarkoordinaten $z^4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$ können wir die Formel von Moivre anwenden. wir erhalten die Lösungen

$z_0 = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

$z_1 = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$

$z_2 = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}))$

$z_3 = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))$

Hier haben wir schon $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ benutzt. Nach der Rückumwandlung erhalten wir die L'osungen $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ und $1 - i$.