Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 01/02

Penn-Karras, Bärwolff, Förster, Tröltzsch 8. April 2002

April – Klausur (Rechenteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang des Klausurgebnisses unter Angabe meiner Matr.–Nr. (ohne Namen) am Schwarzen Brett und im WWW.

....
Unterschrift

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe
10 Punkte

Berechnen Sie die Integrale a) $\int \ln(x^2)\,dx$,
Wir lösen mittels partieller Integration:

$$\int \ln(x^2)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x^2)\,dx = x\ln(x^2) - \int 2\,dx == x\ln(x^2) - 2x = 2x(\ln|x| - 1)$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx.$
Hier führt die Substitution $t = \arctan(x)$ zum Ziel:

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt == \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$$

2. Aufgabe
5 Punkte

Stellen Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+8x^3}$ in Form einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ dar. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist diese Potenzreihe konvergent?
Wir benutzen die Formel für die geometrische Reihe und erhalten

$$f(x) = \frac{1}{1+8x^3} = \frac{1}{1-(-8x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{3n} x^{3n}$$

Diese ist konvergent für $|q| < 1$ also für $|-8x^3| < 1$. Somit erhalten wir Konvergenz für $|x| < 1/2$ oder $x \in]-1/2, 1/2[$.

3. Aufgabe
5 Punkte

Berechnen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{x^2}$.
Wir benutzen die Regel von l' Hospital zweimal

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$$

4. Aufgabe
5 Punkte

Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+1})$.
Zunächst erweitern wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+1} &= \frac{(\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+4n+1} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+4n+1} + \sqrt{n^2+1}} \\
&= \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n+1} + \sqrt{n^2+1}}.
\end{aligned}$$

Nun können wir die höchste Potenz ausklammern

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = 2.$$

5. Aufgabe

8 Punkte

Untersuchen Sie die beiden folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$,

Wir benutzen das Minorantenkriterium (Vergleichskriterium)

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2} > \frac{\sqrt{n^2}}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert, divergiert auch unsere Ausgangsreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{7}{\sqrt{n}+8}$.

Hier wenden wir das Leibnizkriteriums an. Der Ausdruck $(-1)^n\frac{7}{\sqrt{n}+8}$ alterniert. Außerdem ist $\frac{7}{\sqrt{n}+8}$ eine monotone Nullfolge: Der Nenner $\sqrt{n}+8$ wächst mit wachsendem n, daher ist $\frac{7}{\sqrt{n}+8}$ monoton fallend. Somit konvergiert die Reihe aufgrund des Leibnizkriteriums.

6. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = -27$ und stellen Sie diese in der Form $x+iy$ dar.

Nach der Umwandlung in Polarkoordinaten $z^3 = 27(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$ können wir die Formel von Moivre anwenden. Wir erhalten die Lösungen

$z_0 = 3(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}))$

$z_1 = 3(\cos(\frac{3\pi}{3})+i\sin(\frac{3\pi}{3}))$

$z_2 = 3(\cos(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3}))$

Nach der Rückumwandlung erhalten wir die Lösungen $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, -3 und $\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.