TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Fakultät II - Mathematik Stand: 11. Oktober 2002
Lutz, Gündel vom Hofe
Körner, Leschke

Lösungen zur Klausur vom 7.10..2002 (Rechenteil)
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllen die Ungleichung $\quad \dfrac{x+1+|3-x|}{x} \leq 3 \quad$?

Lösung:

1. Fall: $x < 0$

$$\begin{aligned} & \frac{x+1+|3-x|}{x} \leq 3 \quad | \cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & x+1+3-x \geq 3x \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{4}{3} \geq x \qquad \mathbb{L}_1 =]-\infty, 0\,[\end{aligned}$$

2. Fall: $0 < x < 3$

$$\begin{aligned} & \frac{x+1+|3-x|}{x} \leq 3 \quad | \cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & x+1+3-x \leq 3x \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{4}{3} \leq x \qquad \mathbb{L}_2 = \;[\frac{4}{3}, 3\,[\end{aligned}$$

Für Fall 1 und Fall 2 zusammen :

3. Fall: $3 \leq x$

$$\begin{aligned} & \frac{x+1+|3-x|}{x} \leq 3 \quad | \cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & x+1-3+x \leq 3x \\ \Leftrightarrow \quad & -2 \leq x \qquad \mathbb{L}_3 = \;[3, +\infty[\end{aligned}$$

gesamte Lösungsmenge ist $\quad \mathbb{L} = \,]-\infty, 0[\, \cup \,[\frac{4}{3}, +\infty\,[.$

---

2. Aufgabe (7 Punkte)

Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz!

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} \cdot \frac{1}{4^k}$ ist nach dem Quotientenkriterium konvergent,

d.h.:

$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$

denn $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{(k+1)^2+1} \cdot \frac{1}{4^{k+1}} \cdot \frac{k^2+1}{k} \cdot 4^k = \frac{1}{4}.$

. . . .

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{n^3}$ ist divergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ ist eine divergente Minorante,

denn $\frac{2n^2+n}{n^3} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > \frac{2}{n}.$

---

3. Aufgabe (7 Punkte)

a) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(3x))^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6\sin 3x \cdot \cos 3x}{6x}$ Regel von de l'Hospital

$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 3x - 3\sin^2 3x}{1}$ Regel von de l'Hospital

$= 3$

. . . .

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2} \cdot (n^3+5n^2+3n)}{n \cdot (n^2+2) \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} 9 \underbrace{\frac{n^3+5n^2+3n}{n^3+2n}}_{\to 1}$

$= 9$

---

4. Aufgabe (5 Punkte)

$\frac{d}{dx} \left(\arctan(x^3)\right)^4 =$

$4\left(\arctan(x^3)\right)^3 \cdot \frac{1}{(x^3)^2+1} \cdot 3x^2$

---

5. Aufgabe (5 Punkte)

$$\begin{array}{lll} \text{Gegeben:} & f'(x) = 1 + x + (f(x))^2\,, & f(1) = 0 \\ \Longrightarrow & & f'(1) = 2 \\ \Longrightarrow & f''(x) = 1 + 2f(x)f'(x) & \\ \Longrightarrow & & f''(1) = 1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad T_2(x) = \frac{1}{0!}f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2$$
$$= 0 + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$$

---

6. Aufgabe (10 Punkte)

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}-3}^{\pi^2-3} \frac{\sin\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}dx =$

Substitution $t = \sqrt{x+3}$, $\quad x = t^2 - 3$
und $dx = 2t\ dt$
Grenzen : $x = \dfrac{\pi^2}{4} - 3 \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{\pi}{2}$
und $x = \pi^2 - 3 \quad \Longrightarrow \quad t = \pi$

$= \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin t\ dt$
$= [-2\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2$

. . . .

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} t\cdot e^{-t}\ dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t\cdot e^{-t}\ dt$

partielle Integration: $u = t \quad \Longrightarrow \quad u' = 1$ und $v' = e^{-t} \quad \Longrightarrow \quad v = -e^{-t}$

$= \displaystyle\lim_{b\to\infty}\left[-te^{-t}\right]_0^b + \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}\ dt$

$= 0 + \displaystyle\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^b = 1$
