TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
FAKULTÄT II - INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dozenten: Adams, Bärwolff, Förster, Plato, Tröltzsch

WS 2002/03
Stand: 07.04.03

Lösungen zur April-Vollklausur, Verständnisteil „Analysis I für Ingenieure“

(ohne Gewähr)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) divergent, da harm. Reihe

b) konvergent, da verallgemeinerte harm. Reihe mit Exponent > 2

c) konvergent nach Leibniz

d) divergent mit Minorantenkriterium (harm. Reihe)

e) konvergent mit Quotientenkriterium

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Nein!
Der Grenzwert $\lim_{x\to\pi} \cos\frac{1}{|x-\pi|}$ existiert nicht, da die Funktion bei $x = \pi$ oszilliert.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zu $f(x) = \frac{2x}{x^2-2} = -x\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}}$ erhält man mit der geometrischen Reihe:

$$f(x) = -x\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{x^2}{2})^k = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{x^{2k+1}}{2^k}$$

Konvergenz liegt vor für:

$$|\tfrac{x^2}{2}| < 1 \iff |x| < \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad x \in \,]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,[\,.$$

Aufgabe 4 (11 Punkte)

a)

Betrachte links- und rechtseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten für $x = 0$:

$x > 0$: $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\searrow 0}\frac{x^2}{x} = 0$

$x < 0$: $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{-x^2}{x} = 0$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert sind gleich, also existiert der Differentialquotient für $x = 0$ (und es ist $f'(0) = 0$).

$\Rightarrow f(x)$ ist in $x = 0$ differenzierbar.

b)

Mittelwertsatz: $f(x)$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]\,a, b\,[$. Dann existiert ein $\xi \in \,]\,a, b\,[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

c)

$f'(x) = 2x$ für $x \geq 0$ und $f'(x) = -2x$ für $x < 0$.

$\Rightarrow f'(x) = |2x|$

Somit gilt $f'(\xi) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} \iff |2\xi| = \frac{1^2-(-(-1)^2)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

$\iff |\xi| = \frac{1}{2} \implies \xi_1 = \frac{1}{2}$ und $\xi_2 = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a)

$$f(x) = \tan^2 x \implies f'(x) = \Big((\frac{\sin x}{\cos x})^2 \Big)' = 2\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$$g(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \implies g'(x) = \Big(\cos^{-2} x \Big)' = -2 \cos^{-3} x \cdot (-\sin x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

$\implies f'(x) = g'(x)$

b)

$f(x)$ und $g(x)$ sind zwei Stammfunktionen von $h(x) = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unterscheiden sich die Funktionen dann nur durch eine additive Konstante, d.h $f(x) = g(x) + c$ (mit $c = -1$).

Aufgabe 6 (5 Punkte)

An den Stellen, an denen $f(x)$ stetig ist, also für $x \in \,]-1, 1[$, konvergiert die zu $f(x)$ gehörende Fourierreihe gegen $f(x)$.

An den Sprungstellen von $f(x)$ konvergiert die Fourierreihe von f gegen

$$\frac{f(t_-) + f(t_+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$