Februar-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Es muß erfüllt sein: $\frac{3x-2}{3-2x} - 2 \geq 0$.

1) Für $3-2x > 0$ $(x < \frac{3}{2})$:
$$\begin{aligned} 3x - 2 - 6 + 4x &\geq 0 \\ 7x &\geq 8 \\ x &\geq \tfrac{8}{7} \end{aligned}$$

folglich $L_1 = \left[\frac{8}{7}, \frac{3}{2}\right[$.

2) Für $3-2x < 0$ $(x > \frac{3}{2})$:
$$\begin{aligned} 3x - 2 - 6 + 4x &\leq 0 \\ x &\leq \tfrac{8}{7} \end{aligned}$$

folglich $L_2 = \varnothing$.

Der grösstmögliche Definitionsbereich ist $D = [\frac{8}{7}, \frac{3}{2}[$.

2. Aufgabe 10 Punkte

Für die Gleichung $z^2 + (4i-4)z - 7i = 0$
erhält man mit der $p-q-$ Formel:

$z_{1;2} = (2-2i) \pm \sqrt{(2-2i)^2 + 7i}$

$= 2 - 2i \pm \sqrt{-i}$.

$\sqrt{-i}$:

$w^2 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ hat die Lösungen

$w_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ und $w_2 = -w_1$.

Und damit:

$z_{1;2} = 2 - 2i \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

Die Lösungen sind: $z_1 = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + (-2 - \frac{\sqrt{2}}{2})i$

und $z_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + (-2 + \frac{\sqrt{2}}{2})i$

Alternativ:

Mit dem Ansatz $z = a + bi$ erhält man das Gleichungssystem

$a^2 - b^2 - 4a - 4b = 0$

$2ab + 4a - 4b - 7 + 0$

Aus der ersten Gl. $(a+b)(a-b-4) = 0$ folgt $a = -b$ oder $a = b + 4$

Mit $a = -b$ erhält man $b = -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Aus $a = b + 4$ ergibt sich keine Loesung.

Ergebnis: z_1 und z_2 wie oben.

3. Aufgabe 14 Punkte

$f(x) = e^{-x}(x-1)^2$
Die Ableitungen sind:
$f'(x) = e^{-x}(1-x)(x-3)$ und $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 6x + 7)$
Die Nullstellen von $f'(x)$ sind $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$
und $f''(1) = \frac{2}{e} > 0$, $f''(3) = -\frac{2}{e^3} < 0$.

Folglich hat f ein lokales Minimum bei $x_1 = 1$ und ein lokales Maximum bei $x_2 = 3$.

Es ist $f(1) = 0$, $f(3) = 4e^{-3}$ und (linker Randpunkt!) $f(0) = 1$,
ferner $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Folglich hat f bei $x = 1$ ein globales Minimum und bei $x = 0$ ein globales Maximum.

4. Aufgabe 6 Punkte

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{a \searrow 0} [x \ln x - x]_a^1 = \lim_{a \searrow 0} [1 \ln 1 - 1 - a \ln a + a] = -1,$$

denn
$\lim\limits_{a\searrow 0}(a \ln a) = \lim\limits_{a\searrow 0} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} = \lim\limits_{a\searrow 0} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim\limits_{a\searrow 0}(-a) = 0.$