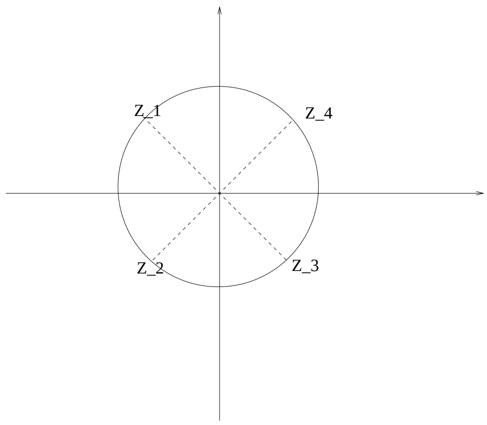
**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** WS 2008/09
**Fakultät II - Mathematik** 06.04.2009
Dozenten: Bärwolff/Böse/Penn-Karras/Tröltzsch
Assistenten: Ammar, Dhamo, Neitzel

# Musterlösung April-Klausur Verständnisteil WS 2008/09 Analysis I für Ingenieure

---

## 1. Aufgabe (7 Punkte)

a) $P : z \mapsto z^4 - a$ ist ein Polynom 4. Ordnung und hat genau vier Nullstellen in $\mathbb{C}$.
b) Die vier Lösungen der Gleichung $z^4 = a$ befinden sich auf einem Kreis mit Radius $R := |z_1| = 1$ (siehe Skizze ):




Die drei andere Lösungen der Gleichung sind

$$z_2 := e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{4\pi}{4})} = e^{i\frac{7\pi}{4}} \text{ und } z_4 := e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{6\pi}{4})} = e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi)} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

c) Es gilt: $a = z_1^4 = e^{3i\pi} = -1$.

## 2. Aufgabe (7 Punkte)

Variante 1: $f$ ist im Punkt $x_0$ differenzierbar wenn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existiert.}$$

In unserem Fall ist die Funktion $f$ Stückweise definiert und wir betrachten:

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

und

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{ax+b-2}{x} = a + \lim_{x\downarrow 0} \frac{b-2}{x}.$$

Die Funktion $f$ ist daher differenzierbar in $x = 0$ für $a = 0$ und $b = 2$ und es gilt $f'(0) = 0$.
Variante 2: Notwendig für die Differenzierbarkeit in $x = 0$ ist die Stetigkeit.
Es gilt:

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} x^2 + 2 = 2 = f(0)$$

und

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} ax + b = b.$$

Die Funktion $f$ ist also stetig in $x = 0$ für $b = 2$.
Weiterhin gilt:

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

und

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{ax}{x} = a.$$

Daher ist die Funktion $f$ in $x = 0$ differenzierbar für $a = 0$ und es gilt $f'(0) = 0$.

## 3. Aufgabe
(9 Punkte)

a) Wahr : $f$ ist eine stetige Funktion definiert auf dem kompakten Intervall $[-1,3]$ und besitzt daher ein globales Maximum .

b) Falsch : Die Funktion $f$ ist ein $\pi$- periodisches trigonometrisches Polynom und wird durch ihre trigonometrische Reihe exakt wieder gegeben. Aus dieser Darstellung lesen wir ab:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{5} \neq 0.$$

c) Wahr : Ein Beispiel ist die ungerade Funktion $f : x \mapsto x$, für die gilt:

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a x\,dx = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{2}a^2 = +\infty \text{ und } \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 x\,dx = \lim_{b\to-\infty} -\frac{1}{2}b^2 = -\infty$$

daher existiert $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ nicht.

## 4. Aufgabe
(7 Punkte)

Die Funktion $f : x \mapsto \cos(x\pi) - 2^{x-2}$ ist auf dem Intervall $[0,1]$ stetig und es gilt $f(0) = \cos(0) - \frac{1}{4} > 0$ und $f(1) = \cos(\pi) - \frac{1}{2} < 0$ . Nach dem Zwischenertsatz existiert $x_0 \in ]0,1[$ so dass, $f(x_0) = 0$ d.h. $x_0$ ist eine Lösung der Gleichung $\cos(x\pi) = 2^{x-2}$.

## 5. Aufgabe
(10 Punkte)

a) Es gilt $R_5(x) = \frac{f^{(5+1)}(\xi)}{(5+1)!}x^{5+1}$ wobei $\xi$ eine Zahl zwischen $0$ und $x$ ist. Da $f^{(k)}(\xi) = 0$ für alle $k \geq 5$ ist $R_5(x) = 0$.

b) Nach dem Satz von Taylor gilt: $f(x) = T_5(x) + R_5(x)$ und aus a) folgt $f = T_5(x)$ damit ist $f$ ein Polynom .

c) Es ist

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4.$$

Da $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, gilt: $f(x) = f'(0)x + \frac{f'''(0)}{6}x^3$. Daher ist $f$ ein ungerades Polynom 3. Grades. Wir wählen: $f(x) = 3x + \frac{1}{2}x^3$.