

## Analysis I für Ingenieure - Juli-Klausur - Lösungen - Rechenteil - SS09

---

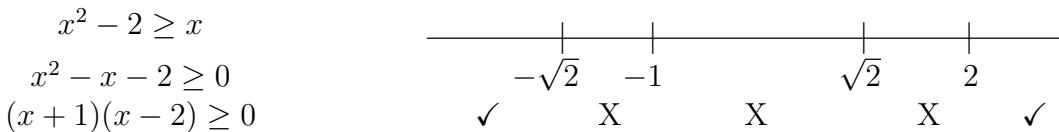
### 1. Aufgabe

**7 Punkte**

Ermitteln Sie sämtliche reelle Lösungen  $x$  der Ungleichung:  $|x^2 - 2| \geq x$ . Geben Sie die Lösungsmenge in Intervall-Notation an.

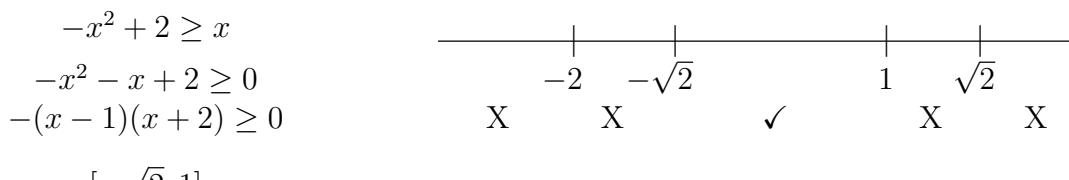
---

**1. Fall:**  $(x^2 \geq 2; \text{ d.h. } x \leq -\sqrt{2} \text{ oder } x \geq \sqrt{2})$



$$]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [2, \infty[$$

**2. Fall:**  $(x^2 \leq 2; \text{ d.h. } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2})$



$$[-\sqrt{2}, 1]$$

$$\mathcal{L} = ]-\infty, 1] \cup [2, \infty[ = \mathbb{R} \setminus ]1, 2[$$


---

### 2. Aufgabe

**8 Punkte**

a) Bestimmen Sie alle Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  der Gleichung  $z^3 = 2\sqrt{3} + 2i$ .

b) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form  $a + bi$  dar:

$$z_1 := 2e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad z_2 := \left(\frac{1+3i}{3-i}\right)^{163}$$


---

a)  $r = \sqrt{12+4} = 4$ ,  $\arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{18}}, \quad z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{13\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{13\pi}{18}}, \quad z_2 = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{13\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{25\pi}{18}}$$

b)  $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = re^{i\phi}$  mit  $r = 2, \phi = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{1+3i}{3-i}\right)^{163} = \left(\frac{1+3i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}\right)^{163} \\ &= \left(\frac{3+9i+i+3i^2}{10}\right)^{163} = \left(\frac{10i}{10}\right)^{163} = i^{163} = i^{4(40)+3} = i^3 = -i \end{aligned}$$


---

### 3. Aufgabe

**7 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte für  $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ :

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 - 7n + 1}{5 - 2n^4}$     b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(3n)}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$

---

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 - 7n + 1}{5 - 2n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{6 - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{\frac{5}{n^4} - 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{-2} = -3$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(3n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2) + \ln(n)}{\ln(3) + \ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln((1-x)^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1-x)} \quad \text{Stetigkeit von } e^x \quad e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1-x)\right)}$$

L'Hospital  $\underset{e^{\left(\frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1-x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 1}\right)}}{=}$   $= e^{-1}$

#### 4. Aufgabe

**8 Punkte**

Sei  $f : ]-1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $x \mapsto \ln\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$ .

- a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom  $T_3(x)$  dritten Grades von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$ .
- b) Berechnen Sie mit Hilfe von  $T_3(x)$  näherungsweise den Wert  $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$  und schätzen Sie den Fehler ab.

$k$	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(1)$	$\frac{f^{(k)}(1)}{k!}$
0	$\ln\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)$	0	0
1	$(x+1)^{-1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$-(x+1)^{-2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
3	$2(x+1)^{-3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

$\Rightarrow T_3(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3$

- b) Weil  $f(x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$  für  $x = 2$  gilt, setzen wir  $x = 2$  in  $T_3$  ein:

$$T_3(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{12 - 3 + 1}{24} = \frac{5}{12}$$

Das Restglied  $R_3(2) = \frac{-6}{4!(\xi+1)^4}(2-1)^4$  wird (für  $x = 2$  und)  $\xi \in [1, 2]$  abgeschätzt:

$|R_3(2)|$  ist maximal für  $\xi = 1$ :  $|R_3(2)| < \frac{6}{24(2)^4} 1^4 = \frac{1}{64}$

#### 5. Aufgabe

**10 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)  $\int \frac{4}{x^2 - 9} dx$    b)  $\int x\sqrt{x+3} dx$    c)  $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x \sin(x^2) e^{\cos(x^2)} dx$    d)  $\int_1^8 \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$

a)  $\int \frac{4}{x^2 - 9} dx = \int \left( \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} \right) dx = \int \left( \frac{-2/3}{x+3} + \frac{2/3}{x-3} \right) dx$   
 $= -\frac{2}{3} \ln|x+3| + \frac{2}{3} \ln|x-3| + C$

- b) Partielle Integration mit  $v = x$ ,  $u' = (x+3)^{\frac{1}{2}}$  anwenden:

$$\int x\sqrt{x+3} dx = \frac{2}{3}x(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (x+3)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3}x(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+3)^{\frac{5}{2}} + C$$

- c) Substitution mit  $u = \cos(x^2)$ ,  $du = -2x \sin(x^2) dx$  anwenden:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x \sin(x^2) e^{\cos(x^2)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2} e^u du = \frac{7}{2} e^u \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} \left( e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$

- d) Substitution mit  $u = \sqrt[3]{x}$  ( $\Rightarrow u^3 = x \Rightarrow 3u^2 du = dx$ )

$$\int_1^8 \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \int_1^2 \frac{3u^2}{u^3 + u} du = \int_1^2 \frac{3u}{u^2 + 1} du = \frac{3}{2} \ln|u^2 + 1| \Big|_1^2 = \frac{3}{2} (\ln(5) - \ln(2))$$