Technische Universität Berlin **SoSe 2011**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Doz.: Böse, Goßler, Gündel vom Hofe, Krumbiegel
Ass.: Kurt, Méndez, Sète

Lösung zur Oktober-Klausur „Analysis 1 für Ingenieure“ Rechenteil

---

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) (2 Punkte) $P(0) = -12, P(1) = 20$. Da $P(0) < 0$ und $P(1) > 0$ ist und P stetig, folgt mit dem Zwischenwertsatz dass P eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ hat.

(b) (2 Punkte) $P(2i) = 32 - 40i - 20 + 40i - 12 = 0$

(c) (2 Punkte) $(2z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 20z - 12) : (z^2 + 4) = 2z^2 + 5z - 3$

(d) (4 Punkte) Aus (c) haben wir $P(z) = (z^2 + 4)(2z^2 + 5z - 3)$. Aus (b) folgt $z_1 = 2i$ und weil die Koeffizienten reell sind $z_2 = -2i$. (Alternativ: $z^2 + 4 = 0$ lösen). Lösen von $2z^2 + 5z - 3$ mit $pq-$Formel oder Summen/Produktregel ergibt $z_3 = 1/2$ und $z_4 = -3$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) (3 Punkte) Zu beachten ist, dass das Integral an der unteren Grenze uneigentlich ist.

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0} \int_{a}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^4 = 4.$$

Lösung ohne Verschiebung:

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx = \lim_{a \to -2} \int_{a}^{2} \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx = \lim_{a \to -2} 2\sqrt{x+2}\Big|_a^2 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{0} = 4.$$

(Wichtig: Behandeln des uneigentlichen Integrals (mit Bemerkung), Stammfunktion, korrektes Einsetzen in die Stammfunktion bzw. korrektes Verschieben der Grenzen).

(b) (3 Punkte) Substitution: $u(x) = \sin(2x), du = 2\cos(2x)dx$. Also $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) \cdot (\sin(2x))^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 du$, und mit Einsetzen $\frac{1}{2} \int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.

(c) (4 Punkte) Partielle Integration: $u(x) = \ln(x), u'(x) = \frac{1}{x}, v'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, v(x) = \frac{-1}{x+1}$ führt auf

$$\int_1^2 \ln(x) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \, dx = \ln(x) \cdot \frac{-1}{x+1}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x+1} . dx$$

Mit Partialbruchzerlegung erhält man

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \, dx = \ln(x)\Big|_1^2 - \ln(x+1)\Big|_1^2.$$

Einsetzen gibt als Endergebnis $\frac{5}{3}\ln(2) - \ln(3)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) (4 Punkte) Ableiten ergibt $f'(x) = \frac{-1}{2-x} + 4, f''(x) = \frac{-1}{(2-x)^2}$. Induktion: $n = 2$: $f''(x) = \frac{-(2-1)!}{(2-x)^2}$. $n \to n+1$: (IV) Es gelte $f^{(n)}(x) = \frac{-(n-1)!}{(2-x)^n}$ für ein $n \geq 2$. (IB) Zu zeigen: $f^{(n+1)}(x) = \frac{-n!}{(2-x)^{n+1}}$. Induktionsschritt:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \overset{(IV)}{=} \frac{d}{dx} \frac{-(n-1)!}{(2-x)^n} = \frac{-(n-1)!n}{(2-x)^{n+1}} = \frac{-n!}{(2-x)^{n+1}}$$

(b) (3 Punkte) Einsetzen in die Funktion bzw. die Ableitungen ergibt $f(1) = 4, f'(1) = 3, f''(1) = -1, f'''(1) = -2$. Somit folgt für das Taylor-Polynom

$$T_3(x) = 4 + 3(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

(c) (3 Punkte) Einsetzen in die Formel für das Restglied fürt auf $R_3(x) = \frac{-3!}{4!} \cdot \frac{1}{(2-\xi)^4} \cdot (x-1)^4$ für ein $\xi \in [0,1]$. Im Betrag wird dies maximal für $\xi = 1$ (Nenner) und $x = 0$ (Zähler). Einsetzen ergibt also $|R_3(x)| \leq \frac{3!}{4!} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$.