Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: Gündel-vom Hofe, Mehl, Penn-Karras, Schneider
Ass.: Altmann, Tölle

WS 11/12
20. Feb 2012

Februar – Klausur
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. **Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden.** Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Bitte geben Sie im Zweifelsfalle auch Ihre Schmierzettel ab und markieren Sie diese entsprechend.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze, aber vollständige Begründung** an. **Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden!** Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es **keine Punkte!**

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 Punkten bestanden, wobei in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden müssen.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

(a) (3P) Für welche **reellen** Zahlen x gilt $\frac{|2x-3|}{x} \leq 4$?

* Die Ungleichung ist für $x = 0$ nicht definiert. Falls $x < 0$, gilt

$$\frac{|2x-3|}{x} = -\frac{|2x-3|}{|x|} \leq 0 \leq 4,$$

die Ungleichung ist also erfüllt.

* Falls $x > 0$, formt man um $|2x-3| \leq 4x$.
Fallunterscheidung:
Fall 1: $2x - 3 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$
$\Longrightarrow 2x - 3 \leq 4x$.
Fall 2: $2x - 3 < 0 \Longleftrightarrow x < \frac{3}{2}$.
$\Longrightarrow -(2x-3) \leq 4x$.

* Falls $x \geq \frac{3}{2}$, ist die Ungleichung $x \geq -\frac{3}{2}$ erfüllt. Falls $0 < x < \frac{3}{2}$, lautet die Ungleichung $x \geq \frac{1}{2}$. Die Lösungsmenge beträgt also

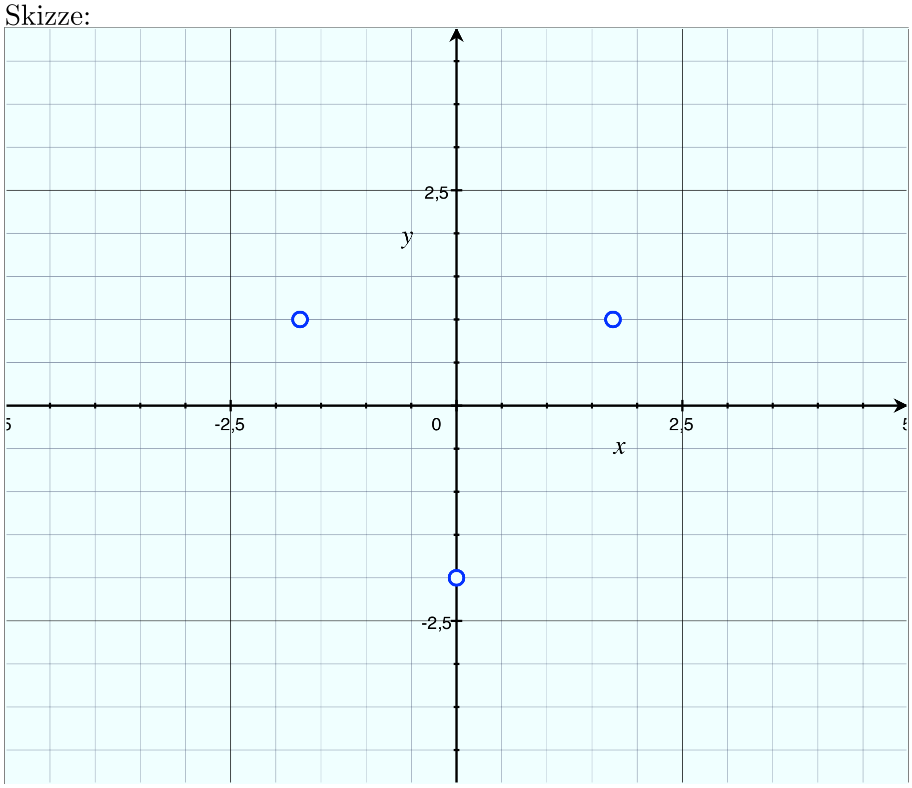
$$\mathbb{L} = \ ]-\infty, 0[\ \cup \ [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\ \cup \ [\frac{3}{2}, \infty[\ = \ ]-\infty, 0[\ \cup \ [\frac{1}{2}, \infty[.$$

(b) (2P) Berechnen Sie alle **reellen** Lösungen x der Gleichung: $\ln\left(\sqrt[3]{x^4}\right) = \ln x^{1/3} - 9$.

$$\begin{aligned} & \ln\left(\sqrt[3]{x^4}\right) = \ln x^{1/3} - 9 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{4}{3}\ln(x) = \frac{1}{3}\ln(x) - 9 \\ \Longleftrightarrow \quad & \ln(x) = -9 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = e^{-9}. \end{aligned}$$

(c) (4P) Berechnen und skizzieren Sie alle **komplexen** Lösungen z der Gleichung: $z^3 = 8i$ in der Form $z = a + bi$.

* Umrechnung von $8i$ und Ansatz $z^3 = 8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$
* Rechnung $z_k = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3})} = 2e^{i\phi_k}$, $k = 0, 1, 2$ wobei $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$, $\phi_1 = \frac{5}{6}\pi$, $\phi_2 = \frac{3}{2}\pi$
* Skizze:



* Umrechnung in kartesische Koord.
  $2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\cos(\frac{\pi}{6}) + 2i\sin(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i.$
  $2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\cos(\frac{5\pi}{6}) + 2i\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i.$
  $2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\cos(\frac{3\pi}{2}) + 2i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -2i.$

(d) (2P) Berechnen Sie alle **komplexen** Zahlen z, für die gilt: $\mathrm{Re}(z + 27i) = 2iz + 3$.

* Ansatz: $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
  $\mathrm{Re}(a + bi + 27i) = 2i(a + bi) + 3$
  $\iff \mathrm{Re}(a + i(b + 27)) = (3 - 2b) + 2ai$
  $\iff a = (3 - 2b) + 2ai$
* Genau dann Null, wenn Real- und Imaginärteil beide Null sind.
  $\iff a = 0$ und $b = \frac{3}{2}$
  $\implies \mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}i\right\}.$

2. Aufgabe 10 Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(\sin(x))\cos(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt$

Hinweis: $\sin(1)$ muss nicht weiter berechnet oder gerundet werden.

a) (3P) Ansatz: Substitution $\sin x = t$. (Oder auch O.K.: Form $f(g)g'$ erkennen).

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d(\sin(x))}{dx} = \cos(x)$$

$\Longrightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)}\,dt$. Also gilt

$$\int_0^{\pi/2} \cos(\sin(x))\cos(x)\,dx = \int_0^1 \cos(t)\frac{\cos(x)}{\cos(x)}\,dt = \int_0^1 \cos(t)\,dt$$

$$= \sin(t)\Big|_0^1 = \sin(\sin(x))\Big|_0^{\pi/2} = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1).$$

b) (3P) Partialbruchzerlegung des Integranden mit doppelter Nullstelle bei $x = 0$. Ansatz:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Erhalten durch Koeffizientenvergleich $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$ d.h.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}.$$

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)}\,dx \underset{(1P)}{=} -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

c) (4P) Es handelt sich um ein uneigentliches Integral. Partielle Integration liefert

$$\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left((-te^{-t})\Big|_0^b - \int_0^b (-e^{-t})\,dt\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-te^{-t} - e^{-t}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-be^{-b} - e^{-b} - (-1)\right)$$

$$= 1 - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b+1}{e^b}\right) = 1 - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^b}\right) = 1.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 1 + \cos(2x)$.

(a) (3P) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 von f an der Stelle $x_0 = \pi/4$.

*
$$f'(x) = -2\sin(2x).$$
$$f''(x) = -4\cos(2x).$$

* Taylorpolynom in $x_0 = \pi/4$:

$$T_2(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 0 = -2x + 1 + \frac{\pi}{2}$$

(b) (3P) Bestimmen Sie das dazugehörige Restglied.

*
$$f'''(x) = 8\sin(2x)$$

* Restglied:
$$R_2(x) = \frac{4}{3}\sin(2\xi)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3,$$

* ..., wobei ξ zwischen x und $\pi/4$ liegt.

(c) (4P) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{f(x)}{(x - \pi/2)^2}.$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 + \cos(2x)}{(x - \pi/2)^2} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \pi/2} \frac{-2\sin(2x)}{2(x - \pi/2)} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \pi/2} \frac{-4\cos(2x)}{2} = -2\cos(\pi) = 2.$$

<u>Verständnisteil</u>

4. Aufgabe 10 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0$ und die Funktion f gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x \geq 0 \\ x^3 + a^2 x + b, & x < 0 \end{cases}$$

(a) (2P) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f für $x > 0$.

* $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}\ln(x)$, denn ...
* $f(f^{-1}(x)) = \exp(a\frac{1}{a}\ln x) = x$ bzw. $f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{a}\ln(e^{ax}) = \ln(e^x) = x$

(b) (4P) Für welche Parameter a, b ist die Funktion f auf dem gesamten Definitionsbereich stetig?

* Da Polynom und e-Fkt stetig, ist f stetig für alle $x \neq 0$
* linksseitiger Grenzwert $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 + a^2 x + b = b$
* rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{ax} = 1$
* f stetig in 0, wenn Grenzwerte übereinstimmen und gleich Funktionswert, also $b = 1$ (a beliebig)

(c) (4P) Für welche Parameter a, b ist die Funktion f sogar differenzierbar?

(a) Da Polynom und e-Fkt differenzierbar, ist f diff. für alle $x \neq 0$

(b) Grenzwert Differenzenquotient von links ($b = 1$ notwendig)

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^3 + a^2 x + b - 1}{x} = \lim_{x \nearrow 0} x^2 + a^2 = a^2$$

(c) Grenzwert Differenzenquotient von rechts (L'Hospital)

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{ae^{ax}}{1} = a$$

(d) f differenzierbar, wenn $b = 1$ und Grenzwerte übereinstimmen, also $a = a^2$.

Ergebnis (da $a > 0$ vorausgesetzt): $a = 1, b = 1$

5. Aufgabe 11 Punkte

(a) (3P) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(1/x)$ und die Folge $a_n = \frac{1}{n\pi}$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ und $\lim_{n\to\infty} f(-a_n)$. Folgt daraus, dass f stetig fortsetzbar an der Stelle $x = 0$ ist?

* $\lim_{n\to\infty} f(\pm a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pm n\pi) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$
* Nein, es folgt nicht, dass f stetig fortsetzbar ist, denn...
* ... es müsste für alle Folgen (a_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gelten, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

(b) (2P) Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Gilt dann immer $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -1$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

* Angabe eines Gegenbeispiels, z.B. $a_n = n$, $b_n = -n^2$
* Berechnung des Grenzwertes, z.B. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \neq -1$

(c) Berechnung von Grenzwerten (i) (3P)

* Umformung
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - 7n^2 + e^{-2n}}{8n^2 - n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/n^2 - 7 + e^{-2n}/n^2}{8 - 1/n + 1/n^2}$$
* Bemerkung zu Einzelgrenzwerten, u.a. $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-2n}}{n^2} = 0$
* Ergebnis $= -7/8$

(c) Berechnung von Grenzwerten (ii) (3P)

* Einzelgrenzwerte $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(-x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$, da Zähler beschränkt.
* Umformung (nicht L'Hospital !)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + \sin(-x)}{x + \cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{\sin(-x)}{x}}{1 + \frac{\cos(x)}{x}}$$
* Ergebnis $= 2$

6. Aufgabe 10 Punkte

(a) (5P) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\int_2^7 f(x)\ dx = 0$. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle im Intervall $[0, 10]$ besitzt.

* Da f stetig ist, ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung anwendbar
* Es existiert also ein $\xi \in]2, 7[$...
* ... mit $f(\xi) = \frac{1}{5} \int_2^7 f(x)\ dx = 0 \cdot \frac{1}{5} = 0$.
* f besitzt demnach eine Nullstelle im Intervall $]2, 7[$.
* $]2, 7[\subset [0, 10]$ und daher hat f eine Nullstelle im Intervall $[0, 10]$

(b) (5P) Sei p die Funktion $p(x) := x^6 - 5x^2 + 3$. Zeigen Sie, dass p eine Nullstelle im Intervall $[-1, 1]$ besitzt.

* Polynom p ist stetig
* Berechnung positiver/negativer Funktionswerte z.B. $p(-1) = p(1) = -1,\ p(0) = 3$
* Der Zwischenwertsatz ist anwendbar: Es existiert also ein $x \in [-1, 0]$ oder $[0, 1]$ mit $p(x) = 0$.
* p besitzt also eine Nullstelle in $[-1, 1]$.