1. Aufgabe **(6 Punkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass folgende Gleichheit gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

2. Aufgabe **(13 Punkte)**

(a) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die folgende Ungleichung gilt, und geben Sie die Lösungsmenge in Intervallschreibweise an.

$$2 - 2|x-1| > x.$$

(b) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^3 = -1$.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $\tan(x) = \sin(2x)$.

3. Aufgabe **(11 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ für $x > 0$. Bestimmen Sie die lineare Approximation von f in $x_0 = 1$, also das Taylorpolynom T_1 mit Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

(b) Geben Sie das zugehörige Restglied $R_1(x)$ nach Lagrange an. Bestimmen Sie das Vorzeichen des Restgliedes für $x \in]0, 2]$.

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{x}$.

(d) Skizzieren Sie f und T_1 auf $]0, 3]$. Beschriften Sie eventuell auftretende Nullstellen und Extremstellen von f in diesem Intervall.

4. Aufgabe **(8 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+2x+1)(x^2+2x+2)}$. Geben Sie die Faktorisierung des Nenners an, wie sie zur **reellen** Partialbruchzerlegung benötigt wird.

(b) Geben Sie die Faktorisierung des Nenners von f an, wie sie zur **komplexen** Partialbruchzerlegung benötigt wird.

(c) Gegeben ist die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2(3+x^2)}$. Geben Sie die Ansätze für die reelle und die komplexe Partialbruchzerlegung von $g(x)$ an.

Hinweis: Die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung sollen **nicht** berechnet werden.

5. Aufgabe **(11 Punkte)**

Gegeben ist die beliebig oft differenzierbare Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos(\sin(x))$.

(a) Besitzt f auf $[0, \pi]$ ein globales Minimum und / oder ein globales Maximum? Begründen Sie Ihre Antwort ohne zu Rechnen.

(b) Bestimmen Sie alle Extremstellen von f auf $[0, \pi]$.

(c) Geben Sie das Bild $f([0, \pi])$ in Intervallschreibweise an.

6. Aufgabe **(11 Punkte)**

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int x \cos(x+1) \, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(2t-3)^4} \, \mathrm{d}t$ (c) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$