



**1. Aufgabe**

(6 Punkte)

Gegeben sei der euklidische Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \right\rangle_1 = \alpha ac + \beta bd, \quad \alpha, \beta > 0$$

- a) Bestimmen Sie  $\alpha, \beta > 0$ , sodass  $\mathcal{B}_{\text{ONB}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^2$  bezüglich des Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  ist.
- b) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ .

**2. Aufgabe**

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |\sin(x)|.$$

**3. Aufgabe**

(5 Punkte)

Gegeben sei der folgende zweidimensionale Teilraum des  $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ :

$$W = \{ax^3 + bx - a : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- a) Wählen Sie aus der Menge  $\mathcal{M} = \{x^3 + 2x - 1, x^2 - 2, 0, -x^3 + 1, 2x - 1\} \subseteq \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$  eine Basis  $\mathcal{D}$  von  $W$  aus. Zeigen Sie, dass  $\mathcal{D}$  eine Basis von  $W$  ist.
- b) Begründen Sie kurz, warum  $\text{span}\{x^2 - 2\}$  kein Teilraum von  $W$  ist.

**4. Aufgabe**

(12 Punkte)

- a) Gegeben sind die Folgen  $(a_n), (b_n), (c_n)$  mit

$$a_n = \frac{(n-1)^2}{5+n^2}, \quad b_n = 3^{-n} \sin(n)e^n, \quad c_n = n + \frac{n}{2}(-1)^n.$$

Untersuchen Sie diese Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert oder begründen Sie ihre Divergenz.

- b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n}{2(n+2)}.$$

**5. Aufgabe**

(10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- a)  $\int \frac{8}{x^2 - 16} dx,$
- b)  $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx,$
- c)  $\int_0^\pi x \sin(x) dx.$

**6. Aufgabe**

(9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

- Zeigen Sie zunächst, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  gilt.
- Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung  $f'$ . Begründen Sie, dass  $f$  auf  $\mathbb{R}$  stetig ist.
- Ist  $f'$  auf  $\mathbb{R}$  stetig? Ist  $f'$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar?

*Hinweis:* Es darf verwendet werden, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  nicht existiert.

**7. Aufgabe**

(10 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Bestimmen Sie  $\det(C)$  in Abhängigkeit vom Parameter  $\alpha$  mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.
- Bestimmen Sie alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ , für die das homogene lineare Gleichungssystem  $C\vec{x} = \vec{0}$  unendlich viele Lösungen hat.
- Bestimmen Sie  $\det(-2C^T)$  für  $\alpha = \frac{1}{4}$ .

**8. Aufgabe**

(14 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

und der Vektor  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom  $p_B$  der Matrix  $B$ .
- Bestimmen Sie alle Eigenwerte von  $B$  und den Eigenraum zum größten Eigenwert.
- Ist  $B$  diagonalisierbar?
- Zeigen Sie, dass  $\vec{w}$  ein Eigenvektor von  $B$  ist.
- Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= B\vec{y}(t) \\ \vec{y}(0) &= 7\vec{w}. \end{aligned}$$

**9. Aufgabe**

(10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) = x \arctan(x).$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von  $g$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  und zeigen Sie, dass für  $x \in [-1, 1]$  für das Restglied  $|R_2(x)| \leq \frac{4}{3}$  gilt.

**Gesamtpunktzahl: 80 Punkte**