Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Doz.: G. Penn-Karras, P. Winkert
Ass.: M. März, M. Oster

Wintersemester 2018/2019
03. April 2019

Modulprüfung
„Analysis I für Ingenieurwissenschaften“

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Hinweise:

- Neben einem beidseitig handbeschriebenen DIN A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
- In Aufgabe 1, 2 und 3 ist nur das Ergebnis gefragt und auf dem Aufgabenblatt einzutragen. Geben Sie **keine Rechnungen** an.
- In den Aufgaben 4, 5 und 6 ist immer ein **vollständiger Lösungsweg auf eigenem Papier** anzugeben (Rechnung und/oder Begründung). Verwenden Sie für die Aufgaben 4, 5 und 6 jeweils ein neues DIN A4-Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Kreuzen Sie jeweils die richtige Lösung an. Pro Teilaufgabe ist genau eine Aussage richtig. Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keine Punkte. Falsch markierte Antworten bitte so ■ kennzeichnen.

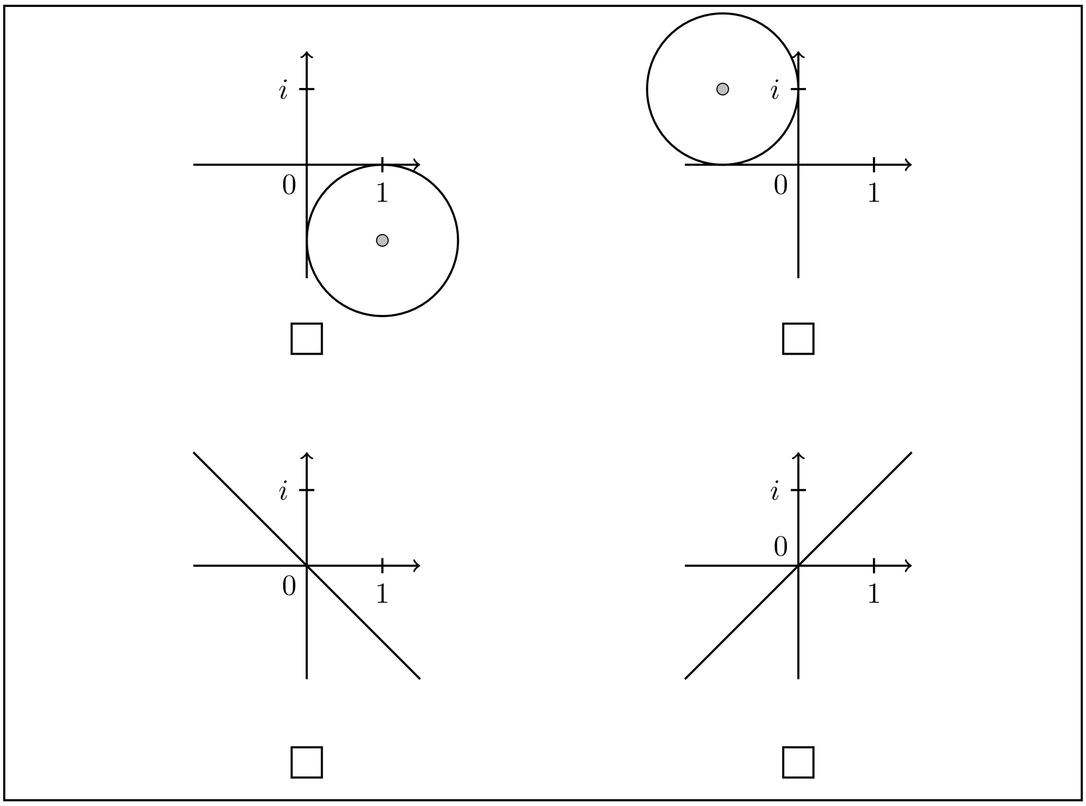
(a) Seien $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-1)^2$ und $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^x$ zwei Funktionen. Dann gilt für die Komposition $g \circ f \colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$:

☐ $g \circ f$ ist surjektiv.
☐ $g \circ f$ ist injektiv.
☐ $g \circ f$ existiert nicht.
☐ $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in [0,\infty[$.

(b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 0$. Welche der folgenden zusätzlichen Eigenschaften garantiert, dass ein $z \in [0,1]$ existiert mit $f'(z) = 0$?

☐ f ist auf $[0,1]$ differenzierbar.
☐ Keine weiteren Bedingungen sind nötig.
☐ f ist auf $[0,1]$ integrierbar.
☐ f hat in $]0,1[$ eine lokale Extremstelle.

(c) Welche der folgenden Skizzen entspricht der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+i|\}$? Kreuzen Sie die richtige Skizze an.



(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$. Dann gilt:

☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2a$.
☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2a+1$.
☐ Keine der obigen Aussagen kann im Allgemeinen getroffen werden.

(e) Sei $f\colon]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(x) = 2|x| + 4$. Dann gilt:

- ☐ Sie besitzt im Intervall $[0,1]$ eine Nullstelle.
- ☐ Sie hat eine lokale Extremstelle bei $x = 0$.
- ☐ Sie ist streng monoton wachsend.
- ☐ Sie ist nicht integrierbar.

(f) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

- ☐ f ist differenzierbar.
- ☐ Falls $\int_a^b f(x)\ dx = 0$, dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = 0$.
- ☐ f ist nicht integrierbar.
- ☐ Keine der obigen Aussagen kann im Allgemeinen getroffen werden.

(g) Betrachten Sie die Gleichung $z^6 = (1+i)^4$. Dann gilt für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$:

- ☐ Die Gleichung hat genau 6 verschiedene Lösungen.
- ☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Lösungen.
- ☐ Für alle Lösungen z gilt $|z| = 1$.
- ☐ Die Gleichung hat nur reelle Lösungen.

(h) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

- ☐ f nimmt auf $[a,b]$ kein Minimum an.
- ☐ $f([a,b])$ lässt sich als Intervall $[c,d]$ schreiben mit $c, d \in \mathbb{R}$ und $c \leq d$.
- ☐ $f([a,b]) = \emptyset$.
- ☐ f ist auf $[a,b]$ injektiv.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, ungerade Funktion. Dann gilt:

- ☐ $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ☐ $f'(x) = 0$ für $x = 0$.
- ☐ $f'(x) \neq 0$ für $x = 0$.
- ☐ Keine der obigen Aussagen kann im Allgemeinen getroffen werden.

(j) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, gerade Funktion. Dann gilt:

- ☐ Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) \cdot \cos(x)$ ist ungerade.
- ☐ $\int_{-a}^a f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$ für alle $a > 0$.
- ☐ $\int_{-a}^a f(x)\ dx = 0$ für alle $a > 0$.
- ☐ f ist nicht integrierbar.

2. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen. Es zählt nur das Ergebnis. Tragen Sie nur das Ergebnis auf diesem Blatt im jeweiligen Feld ein.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+4n}{3n^3\sqrt{n}+4n^2} =$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(n)+\sin(n)}{(n+1)^2} =$$

(c) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{16x^2}{\tan(x)} =$$

(d) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} =$$

(e) $$\frac{d}{dx}\ln\left(-\frac{1}{x}\right) =$$

(f) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos(x)}{x^2-4}\right) =$$

(g) $$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{1+x}\right)\,dx = \qquad +c,\ c\in\mathbb{R}$$

(h) Geben Sie den Ansatz der reellen Partialbruchzerlegung für die folgende rationale Funktion an:

$$\frac{24x^3+15x+21}{(x^2+1)(x^2-1)} =$$

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Was ist der Grenzwert von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \ln(a_n)$?

$\lim_{n\to\infty} b_n$ = $\boxed{}$

(j) Welche kleinste Periode T hat die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(3x) + 2$?

T = $\boxed{}$

3. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Tragen Sie die Ergebnisse der folgenden Aufgabe in die dazugehörigen Felder ein. Bitte führen Sie Zwischenrechnungen auf eigenem Papier aus, das nicht abgegeben werden soll.

(a) Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int x \ln\left(\frac{1}{2}x\right)\, dx = \boxed{ +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Formel der partiellen Integration für das Integral der Form $\int u(x)v'(x)\, dx$ mit $v'(x) = x$ und $u(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$.

(b) Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos(2\sqrt{x} - 1)\, dx = \boxed{ +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $t = 2\sqrt{x} - 1$. Beachten Sie, dass rücksubstituiert werden muss.

(c) Berechnen Sie die Koeffizienten der folgenden Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4x^2 + 2x + 3}{x^3 + x} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x}$$

$A =$ $\boxed{}$ $B =$ $\boxed{}$ $C =$ $\boxed{}$

(d) Berechnen Sie eine Stammfunktion der folgenden rationalen Funktion:

$$\int \left(\frac{2x}{1 + x^2} - \frac{4}{(x + 4)^3}\right)\, dx = \boxed{ +c,\ c \in \mathbb{R}}$$

4. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

(a) Gegeben ist die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_0 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 5}{2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$a_n = 5 - \frac{4}{2^n}.$$

(b) Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen. Geben Sie die Lösungsmenge als Vereinigung von Intervallen an.

$$\frac{x^2 + 8}{x - 1} \geq x - 2.$$

5. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

Betrachten Sie die Funktion $f : [-3, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 12x - 5$.

(a) Hat die Funktion ein globales Minimum und Maximum?

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremalstellen der Funktion und geben Sie jeweils die Art des Extremums an (lokal/global und Maximum/Minimum).

Begründen Sie Ihre Aussagen.

6. **Aufgabe** **(10 Punkte)**

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = 3x^3 - 1 - 3^x$ im Intervall $[0, 3]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass ein $x \in]-\pi, \pi[$ existiert mit

$$\sin^2(x) f'(x) = -2 \sin(x) \cos(x) f(x).$$

Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \sin^2(x) f(x)$ und verwenden Sie den Mittelwertsatz.

(c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$ mit

$$z = \frac{4 + 3i}{1 + 2i}.$$

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte