

Lösungen zur Aufgabensammlung Analysis I für Ingenieure



The early bird
ate too many worms
and died

Inhaltsverzeichnis

Block 1.1 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion	1
Block 1.2 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion	6
Block 1.3 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion	10
Block 2.1 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz	13
Block 2.2 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz	16
Block 2.3 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz	19
Block 3.1 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit	22
Block 3.2 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit	25
Block 3.3 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit	28
Block 4.1 - Polynome, Taylorpolynome	31
Block 4.2 - Polynome, Taylorpolynome	33
Block 4.3 - Polynome, Taylorpolynome	36
Block 5.1 - Partialbruchzerlegung, Integration	38
Block 5.2 - Partialbruchzerlegung, Integration	43
Block 6 - Wahr oder Falsch?	51

Block 1.1 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion

Lösung zur Aufgabe 1 (Juli SoSe 2011, RT A1)

(9 Punkte)

(a) (4 Punkte) Die pq -Formel oder die abc -Formel (1 Punkt) führt auf

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2+i}{2} + \sqrt{\frac{(-(2+i))^2}{4} - 1 - i} \\ &= \frac{2+i}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1} \quad (1 \text{ Punkt fürs Vereinfachen unter der Wurzel}) \end{aligned}$$

Da $\sqrt{-1} = \pm i$ ist (oder weil man schon oben \pm vor die Wurzel geschrieben hat), erhält man die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i$ (1 Punkt) und $z_2 = 1 - i$ (1 Punkt).

(b) (5 Punkte) Schreibe die Aufgabe in Polarkoordinaten:

$$z^3 = -8i = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \quad (1 \text{ Punkt für exponentielle oder Polardarstellung}).$$

Mit dem Satz von de Moivre (bzw. dem Satz über die Berechnung komplexer Wurzeln) gibt es drei Lösungen mit Betrag

$$|z| = 8^{1/3} = 2 \quad \text{und Winkel} \quad \varphi_k = \frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

(1 Punkt für Satz/Ansatz und Berechnen des Betrags). Man erhält also konkret für die Winkel

$$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$$

(1 Punkt für den ersten Winkel) und für die anderen Winkel

$$\varphi_1 = \frac{7\pi}{6} (= \frac{-5\pi}{6}) \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{11\pi}{6} (= \frac{-\pi}{6})$$

(1 Punkt für die zwei weiteren Lösungen). Also

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

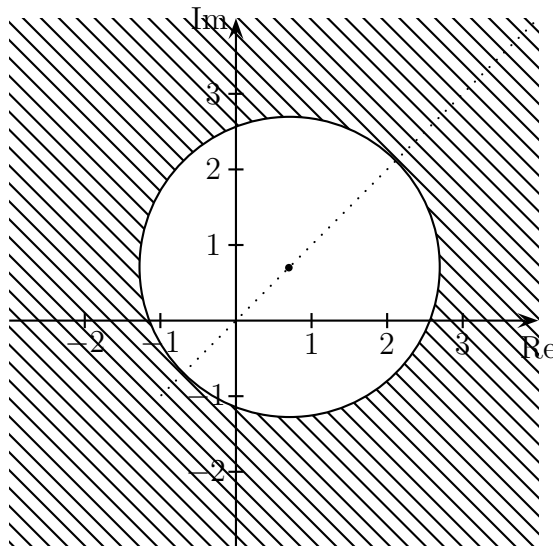
Lösungen in Polar- oder Exponentialdarstellung akzeptieren, Winkel entweder in $[0, 2\pi]$ oder $[-\pi, \pi]$. Skizze (1 Punkt):

Lösung zur Aufgabe 2 (Februar WiSe 2009/2010, VT A2)

(8 Punkte)

$$\begin{aligned} \text{a) } |z| &= \left| \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^5 \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{2}}{4} \right|^5 \text{ (1 Punkt)} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2}^5 \text{ (1 Punkt)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{2}{16}}^5 = \sqrt{\frac{4}{16}}^5 \text{ (1 Punkt)} = \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32} \text{ (1 Punkt)} \end{aligned}$$

b) Es gilt $e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ und die Skizze sieht demnach folgendermaßen aus:



Es gibt Punkte für folgende Details der Skizze:

Das Äußere inklusive Rand (1 Punkt) eines Kreises (1 Punkt), Mittelpunkt auf der Winkelhalbierenden, (1 Punkt) der Ursprung liegt im Inneren des Kreises (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 3 (Februar WiSe 2008/2009, RT A3)

(7 Punkte)

Variante 1: Der Term im Betrag wechselt bei $x_1 = 1$ das Vorzeichen. Deswegen unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $x < 1$: Die Ungleichung $-x + 1 \leq 2x - 1$ ist äquivalent zu $-3x \leq -2$. Die Lösungsmenge davon ist $L_1 = [\frac{2}{3}, +\infty[\cap] - \infty, 1[= [\frac{2}{3}, 1[$.

1. Fall: Die Ungleichung $x - 1 \leq 2x - 1$ ist äquivalent zu $x \geq 0$. Die Lösungsmenge davon ist $L_2 = [0, +\infty[\cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$.

Die Gesamtlösung lautet $L = L_1 \cup L_2 = [\frac{2}{3}, +\infty[$.

Variante 2: Die Ungleichung ist auf $[\frac{1}{2}, +\infty[$ definiert und dort äquivalent zu $x^2 - 2x + 1 \leq 4x^2 - 4x + 1$, also auch zu $3x^2 - 2x \geq 0$. Die Lösungsmenge ist $L = [\frac{1}{2}, +\infty[\cap \left(] - \infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, +\infty[\right) = [\frac{2}{3}, +\infty[$

Lösung zur Aufgabe 4 (Juli SoSe 2010, RT A1)

(12 Punkte)

Punktabzug, falls \lim zwischendurch vergessen wird.

a) i) (3 Punkte)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n^3 + n}{3n^3 - n + 2} \stackrel{(2 \text{ Punkte})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(\frac{3}{n} - 4 + \frac{1}{n^2})}{n^3(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - 4 + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}} \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} -\frac{4}{3}$$

ii) (3 Punkte)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1} &\stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - (n^2 - 1)}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})} \\ &\stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \\ &\stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

iii) (2 Punkte)

$$\text{Es gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{5} \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1 \quad (1 \text{ Punkt}).$$

b) (4 Punkte)

Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 - x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$. Also ist die Regel von de l'Hospital anwendbar (1 Punkt)

Damit gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2 \sin x \cos x}$ (1 Punkt), falls der letzte Grenzwert existiert. Da gilt erneut $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin x \cos x$. De l'Hospital ist wieder anwendbar

$$\text{und es gilt } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2 \sin x \cos x} \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x} \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \frac{1}{2}$$

Punktabzug, falls nicht begründet wird, warum de l'Hospital angewendet werden darf (" $\frac{0}{0}$ " o. ä. ist erlaubt), bzw. wenn der Begriff de l'Hospital nicht kommt. Wenn es nur einmal angegeben wird ist es okay, gibt also keinen Punktabzug.

Lösung zur Aufgabe 5 (Dezember WiSe 2008/2009 (Probeklausur), RT A2) (3 Punkte)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{n^3 - 3n + 1}{n^2} - 3 \cos(n) \right) \\
 &= \frac{n^3 - 3n + 1}{n^3 + n^2} - \frac{3 \cos(n)}{n+1} \\
 &= \frac{n^3 \left(1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - \frac{3 \cos(n)}{n+1} = \frac{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}} - \frac{3 \cos(n)}{n+1}
 \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$. Wegen $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ gilt außerdem $\frac{-3}{n+1} \leq \frac{3 \cos(n)}{n+1} \leq \frac{3}{n+1}$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pm 3}{n+1} = 0$ folgt nach dem Dreifolgensatz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cos(n)}{n+1} = 0$. Folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cos(n)}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

Lösung zur Aufgabe 6 (Oktober SoSe 2010, VT A3) (13 Punkte)

a) (6 Punkte)

Induktionsanfang für $n = 1$: Es ist $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. (1 Punkt)

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. (1 Punkt)

Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass dann auch $a_{n+1} \leq 2$ gilt. (1 Punkt)

Es ist $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ nach Voraussetzung.

Damit erhält man: $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \stackrel{*}{\leq} \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$ (1 Punkt) mit der Begründung \star , dass die Wurzelfunktion monoton wachsend ist (1 Punkt) und an der Stelle \star die Induktionsvoraussetzung (1 Punkt) verwendet wurde.

b) (7 Punkte)

Induktionsanfang für $n = 2$:

$$\sum_{k=2}^2 (k-1) \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = 1 \cdot \ln(2) = \ln(2) \text{ (linke Seite)}$$

$$2 \ln(2) - \ln(2!) = \ln(2) \text{ (rechte Seite)} \text{ (1 Punkt)}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Es gelte für ein } n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \sum_{k=2}^n (k-1) \cdot \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = n \ln(n) - \ln(n!). \text{ (1 Punkt)}$$

Induktionsschluss: Zu zeigen ist, dass dann auch gilt:

$$\sum_{k=2}^{n+1} (k-1) \cdot \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = (n+1) \ln(n+1) - \ln((n+1)!).$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) \cdot \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \\ = & n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \sum_{k=2}^n (k-1) \cdot \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \text{(1 Punkt)} \\ \stackrel{\text{Ind-vor.}}{=} & n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + n \ln n - \ln n! \text{(1 Punkt)} \\ \stackrel{\ln(\frac{a}{b})=\ln(a)-\ln(b)}{=} & n \ln(n+1) - n \ln(n) + n \ln(n) - \ln(n!) = n \ln(n+1) - \ln(n!) \text{(1 Punkt)} \\ = & (n+1) \ln(n+1) - \ln(n+1) - \ln(n!) \text{(1 Punkt)} \\ = & (n+1) \ln(n+1) - (\ln(n+1) + \ln(n!)) \\ \stackrel{\ln(a)+\ln(b)=\ln(a \cdot b)}{=} & (n+1) \ln(n+1) - \ln((n+1)!) \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Block 1.2 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion

Lösung zur Aufgabe 1 (Oktober SoSe 2008, RT A1)

(7 Punkte)

Wir formen um:

$$\begin{aligned}(z + 1 + i)(z - 3 - i) &= \frac{-40i}{1 + 3i} \\ \Leftrightarrow z^2 - 2z - 4i - 2 &= \frac{-40i(1 - 3i)}{10} \\ \Leftrightarrow z^2 - 2z + 10 &= 0\end{aligned}$$

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen (p-q-Formel) erhält man

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i$$

Lösung zur Aufgabe 2 (Februar WiSe 2010/2011, RT A1)

(10 Punkte)

a) (5 Punkte)

Fallunterscheidung: (1 Punkt) für das Auffinden aller drei Fälle.

1. Fall: $x < 0$

Dann ist $|x| > 10|x-3| \Leftrightarrow -x > -10x+30 \Leftrightarrow 9x > 30 \Leftrightarrow x > \frac{10}{3}$, was im Widerspruch zu $x < 0$ steht. (1 Punkt)

2. Fall: $0 \leq x \leq 3$

Dann ist $|x| > 10|x-3| \Leftrightarrow x > -10x+30 \Leftrightarrow 11x > 30 \Leftrightarrow x > \frac{30}{11}$, d.h. im zweiten Fall ergibt sich als Lösungsmenge das Intervall $]\frac{30}{11}, 3]$ (1 Punkt)

3. Fall: $x > 3$

Dann ist $|x| > 10|x-3| \Leftrightarrow x > 10x-30 \Leftrightarrow 30 > 9x \Leftrightarrow \frac{10}{3} > x$, d.h. im dritten Fall ergibt sich als Lösungsmenge das Intervall $]3, \frac{10}{3}[$. (1 Punkt)

Insgesamt ist die Ungleichung für alle $x \in]\frac{30}{11}, \frac{10}{3}[$ erfüllt. (1 Punkt)

b) (5 Punkte)

Wir benutzen für die Umformung folgende Tatsachen: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ und $\frac{4}{i} = -4i$ (3 Punkte)

$$z \cdot \bar{z} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{i} = 0 \Leftrightarrow |z|^2 \cdot i = 4i \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2 \text{ (1 Punkt)}$$

Zeichnung: Kreis um den Ursprung mit Radius 2. (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 3 (Oktober SoSe 2010, RT A1)

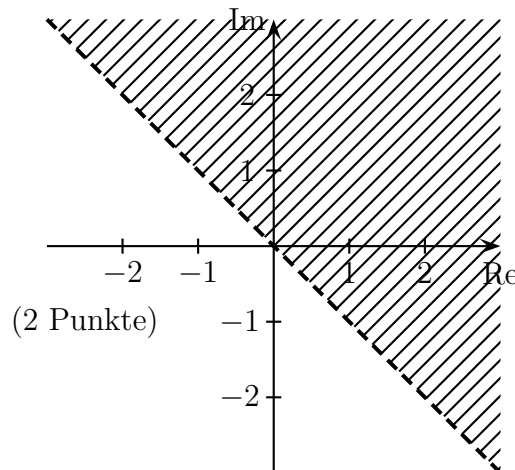
(11 Punkte)

a) (5 Punkte)

Sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} & |z - 1| < |z + i| \\ \Leftrightarrow & |(a - 1) + bi| < |a + (b + 1)i| \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(a - 1)^2 + b^2} < \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} \quad (1 \text{ Punkt}) \\ \Leftrightarrow & a^2 - 2a + 1 + b^2 < a^2 + b^2 + 2b + 1 \quad (1 \text{ Punkt}) \\ \Leftrightarrow & -a < b \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{L} = \{z \mid -\operatorname{Re}(z) < \operatorname{Im}(z)\}$ (1 Punkt)



b) (6 Punkte)

$$z^3 + 8i = 0 \Leftrightarrow z^3 = -8i.$$

Es ist $|z^3| = 8$ (1 Punkt) und $|z| = \sqrt[3]{8} = 2$. (1 Punkt)

Als Argument von z haben wir $\arg(z) = \frac{3}{2}\pi$.

(hier geht natürlich auch $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$) (1 Punkt)

Also ist $z^3 = 8(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi)$. (1 Punkt)

Somit erhalten wir die drei Wurzeln

$$z_k = 2\left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Also ist $z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 2i$, $z_1 = 2(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$,

$z_2 = 2(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$. (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 4 (April WiSe 2008/2009, RT A3) (6 Punkte)

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + \sqrt{n} + \cos(2n+1)}{2n^3 + n\pi + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{\cos(2n)}{n^3}\right)}{n^3 \left(2 + \frac{\pi}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{2}, \text{ da } |\cos(2n)| \leq 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x^2)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x \cos(x^2)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)} = \frac{1}{2}.$$

Lösung zur Aufgabe 5 (Juli SoSe 2011, VT A3) (12 Punkte)

(a) (6 Punkte) (i) Es gilt $\cos(2\pi n) = 1, n \in \mathbb{N}$ (1 Punkt). Weiter gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$ (1 Punkt). Als Produkt zweier konvergenter Folgen ist also $a_n, n \in \mathbb{N}$, auch konvergent, und der Grenzwert ist 0 (1 Punkt).

(ii) Es gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$, d.h. alterniert zwischen -1 und 1 (1 Punkt). Die Folge $\sin(\frac{\pi}{2}n)$ nimmt periodisch abwechselnd die Werte $0, 1, 0, -1$ an (1 Punkt). Für gerade n ist also $b_n = 0$, für ungerade n ist b_n entweder -1 oder 1 . Wir haben also zwei Teilfolgen, von denen die eine gegen 0 konvergiert, und die andere betragsmäßig immer 1 ist. Somit konvergiert die Folge nicht (1 Punkt).

(b) (6 Punkte) (i) $a_n = (-1)^{n+1}(\frac{1}{2})^n = -(-\frac{1}{2})^n$. Diese Folge ist nicht monoton, da das Vorzeichen wechselt (1 Punkt). Sie ist beschränkt, denn $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (1 Punkt). Sie ist konvergent, denn wir wissen dass die geometrische Folge q^n für $|q| < 1$ gegen 0 konvergiert (1 Punkt).

(ii) $a_n = -(2)^n$. Die Folge ist monoton (fallend), denn das Vorzeichen ist immer negativ, und $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2^n$ (bzw. $-2^{n+1} \leq -2^n$). (1 Punkt). Sie ist nicht beschränkt, da die geometrische Folge für $|q| > 1$ nicht konvergiert und deshalb auch nicht beschränkt ist (oder da 2^n unbeschränkt ist, oder...) (1 Punkt). Sie ist nicht konvergent, da geometrische Folge mit $|q| > 1$ (1 Punkt).

Lösung zur Aufgabe 6 (Juli SoSe 2009, VT A2)

(8 Punkte)

a) Induktionsanfang: Für $n = 3$ ist die Formel erfüllt: $\sum_{k=1}^3 (4k-2) = 2+6+10 = 18 = 2 \cdot 3^2$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$:

$$\sum_{k=1}^n (4k-2) = 2n^2$$

Induktionsbehauptung: So gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (4k-2) = 2(n+1)^2$$

Induktionsschritt: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} (4k-2) = \sum_{k=1}^n (4k-2) + (4(n+1)-2) \stackrel{\text{I.V.}}{=} 2n^2 + 4n + 2 = 2(n^2 + 2n + 1) = 2(n+1)^2$$

b) Aus $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right)$ und Konvergenz der Folge (x_n) folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right)$.

Sei $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dann gilt $L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{A}{L} \right)$. Daraus folgt:

$$\frac{1}{2}L = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{L}$$

$$A > 0, x_n > 0 \Rightarrow L \geq 0 \Rightarrow L = \sqrt{A} \quad L^2 = A$$

Block 1.3 - Komplexe Zahlen, (Un-)Gleichungen, Grenzwerte, vollst. Induktion

Lösung zur Aufgabe 1 (Juli SoSe 2009, RT A2)

(8 Punkte)

a) $r = \sqrt{12 + 4} = 4$, $\arctan\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
 $\Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{\pi}{18}}$, $z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{13\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{13\pi}{18}}$, $z_2 = \sqrt[3]{4}e^{i\left(\frac{13\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{25\pi}{18}}$

b) $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = re^{i\phi}$ mit $r = 2, \phi = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

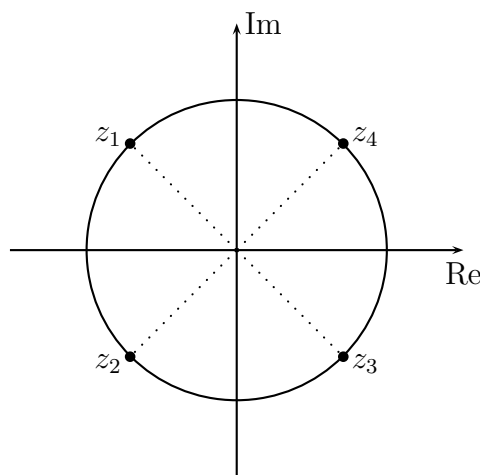
$$z_2 = \left(\frac{1+3i}{3-i}\right)^{163} = \left(\frac{1+3i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i}\right)^{163}$$

$$= \left(\frac{3+9i+i+3i^2}{10}\right)^{163} = \left(\frac{10i}{10}\right)^{163} = i^{163} = i^{4(40)+3} = i^3 = -i$$

Lösung zur Aufgabe 2 (April WiSe 2008/2009, VT A1)

(7 Punkte)

- a) $P : z \mapsto z^4 - a$ ist ein Polynom 4. Ordnung und hat genau vier Nullstellen in \mathbb{C} .
 b) Die vier Lösungen der Gleichung $z^4 = a$ befinden sich auf einem Kreis mit dem Radius $R := |z_1| = 1$ (siehe Skizze):



Die drei anderen Lösungen der Gleichung sind

$$z_2 = e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{4}}, \quad \text{und } z_4 = e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

- c) Es gilt: $a = z_1^4 = e^{i3\pi} = -1$.

Lösung zur Aufgabe 3 (April WiSe 2008/2009, RT A1) (6 Punkte)

Die linke Seite $\sqrt{x^2 + 1}$ der Ungleichung ist definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und ist nicht negativ. Auf \mathbb{R}^+ ist die Ungleichung äquivalent zu $x^2 + 1 \leq 4x^2$. Diese hat die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$. Die Teilmenge $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ entfällt wegen $x \geq 0$. Die Lösungsmenge ist $L = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

Lösung zur Aufgabe 4 (April WiSe 2010/2011, RT A2) (11 Punkte)

(a) (4 Punkte)

Für $x \rightarrow 0$ gilt $1 - \cos x \rightarrow 0$ und $x^2 \rightarrow 0$. Zur Berechnung des Grenzwertes können wir also die Regel von l'Hospital anwenden (1 Punkt) und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{0/0 \text{ (1 Punkt)}}{=} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{0/0 \text{ (1 Punkt)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} \stackrel{1 \text{ Punkt}}{=} \frac{1}{2}$$

Bei der letzten Gleichheit haben

wir die Stetigkeit des Cosinus ausgenutzt.

(b) (3 Punkte)

Die Funktionen $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos x$ sind stetig in 0 und es gilt $\cos 0 - \sin 0 \neq 0$ (1 Punkt). Deswegen gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x - \sin x} \stackrel{1 \text{ Punkt}}{=} \frac{e^0}{\cos 0 - \sin 0} = \frac{1}{1 - 0} \stackrel{1 \text{ Punkt}}{=} 1.$$

(c) (4 Punkte)

Es gilt

$$a_n = \frac{n^2 + \cos n - 2n}{n^2 + 2n + 1} \stackrel{1 \text{ Punkt}}{=} \frac{n^2(1 + \frac{\cos n}{n^2} - \frac{2}{n})}{n^2(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} \stackrel{1 \text{ Punkt}}{=} \frac{1 + \frac{\cos n}{n^2} - \frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

Auf die rechte Seite können wir die Grenzwertsätze für Folgen anwenden, denn es gilt

- $\frac{1}{n^2}, \frac{2}{n}$ konvergieren gegen 0;
- $\frac{\cos n}{n^2} \rightarrow 0$, denn $0 \leq |\frac{\cos n}{n^2}| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$;
- Der Nennner konvergiert gegen 1. (1 Punkt)

Insgesamt gilt

$$a_n \rightarrow \frac{1}{1} = 1. (1 \text{ Punkt})$$

Lösung zur Aufgabe 5 (Juli SoSe 2009, RT A3)

(7 Punkte)

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 - 7n + 1}{5 - 2n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{n^4} \cdot \frac{6 - \frac{7}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{\frac{5}{n^4} - 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{-2} = -3$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2n)}{\ln(3n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2) + \ln(n)}{\ln(3) + \ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln((1-x)^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1-x)} \stackrel{\text{Stetigkeit von } e^x}{=} e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1-x)\right)} \\ &\stackrel{\text{L'Hospital}}{=} e^{\left(\frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1-x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 1}\right)} = e^{-1} \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 6 (Februar WiSe 2009/2010, RT A1)

(7 Punkte)

Induktionsanfang: $n = 0$: LS = 0, RS = $1 - \frac{3}{3} = 0$ (1 Punkt)

Induktionsvoraussetzung: Für ein n gilt $\sum_{k=0}^n \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}}$ (1 Punkt)

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} = 1 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+2}}$ (1 Punkt)

Induktionsschluss: $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{4k}{3^{k+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}}$ (1 Punkt) $\stackrel{\text{(IV)}}{=} 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}}$ (1 Punkt)
 $= 1 - \frac{3(2n+3) - 4(n+1)}{3^{n+2}}$ (1 Punkt) $= 1 - \frac{2n+5}{3^{n+2}} = 1 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+2}}$ (1 Punkt)

Block 2.1 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz

Lösung zur Aufgabe 1 (April WiSe 2008/2009, RT A4) (9 Punkte)

- a) Der maximale Definitionsbereich ist auf Grund des natürlichen Logarithmus gegeben durch $D_f =]0, +\infty[$.
- b) Variante 1: f ist als Quotient differenzierbarer Funktionen zweimal differenzierbar auf $]0, +\infty[$. Es gilt $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ und $f''(x) = \frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x-3}{x^3}$. Die einzige Nullstelle von $f'(x)$ und somit einziger Kandidat für ein lokales Extremum in $]0, +\infty[$ ist $x_0 = e$. Es gilt $f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0$, daher hat f in $x_0 = e$ ein lokales Maximum. Weiterhin gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 < \frac{1}{e} = f(e)$. Daher besitzt $f(x)$ in $x_0 = e$ ein globales Maximum.
- variante 2: f ist als Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $]0, +\infty[$. Es gilt $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$. Die einzige Nullstelle von $f'(x)$ und somit einziger Kandidat für ein lokales Extremum in $]0, +\infty[$ ist $x_0 = e$. Auf $]0, e[$ gilt $f'(x) > 0$ und auf $]e, +\infty[$ gilt $f'(x) < 0$. Also ist $f(x)$ auf $]0, e[$ monoton wachsend und auf $]e, +\infty[$ monoton fallend. Daher hat $f(x)$ in $x_0 = e$ ein lokales und globales Maximum.

Lösung zur Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2011, VT A1) (10 Punkte)

- (a) Es gilt $h'(t) = -3e^{-3t} < 0, \forall t \in \mathbb{R}$ (1 Punkt), also folgt nach dem Monotoniekriterium der 1. Ableitung dass h (streng) monoton fallend ist (1 Punkt). Alternativ: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $t \mapsto e^t$ monoton wachsend ist, daraus folgt auch dass h monoton fällt.
- (b) Durch Einsetzen von geeigneten zwei Punkten mit gleichem Betrag aber unterschiedlichem Vorzeichen (z.B. $t = 1$ und $-t = -1$) direkt nachrechnen dass $f(t) \neq f(-t)$, (1 Punkt) und $f(t) \neq -f(-t)$ (1 Punkt).
 Nullstellen: $f(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (1 Punkt).
 Hier sind die Lösungen genau für $k = 0, 1, 2$ im Intervall $[0, \pi]$ (1 Punkt). Lösungen sind also $t_1 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{\pi}{2}, t_3 = \frac{5\pi}{6}$ (1 Punkt).
- (c) Es gilt für den Randwert $f(0) = \cos(0)e^0 = 1$ (1 Punkt). Weiter gilt $\cos(3t) \in [-1, 1]$, und e^{-3t} fällt monoton, somit ist $f(t) < 1$ für alle $t > 0$ (1 Punkt). Somit liegt das Maximum im Punkt 0 und der Funktionswert des Maximums ist 1 (1 Punkt). (Anmerkung: Die entscheidenden Punkte sind Monotonie von h , Beschränktheit des Cosinus, Berücksichtigung der Randwerte und Berechnung des Wertes).

Lösung zur Aufgabe 3 (April WiSe 2010/2011, RT A1) (8 Punkte)

$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} + (x^2 + 1)e^{-x^2}(-2x) \\ &= -2x^3e^{-x^2}. \end{aligned} \quad (2 \text{ Punkte})$$

Das ist nur für $x = 0$ gleich Null, das heißt das ist der einzige Kandidat für eine Extremstelle (2 Punkte). Da $f''(0) = f'''(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) = -12$ ist hier tatsächlich ein lokales Maximum, welches zugleich global ist (2 Punkte). Daraus folgt, dass die Funktion auf dem Intervall $]-\infty, 0[$ streng monoton wachsend und auf $]0, \infty[$ streng monoton fallend ist. (2 Punkte)

Andere Möglichkeit: Man kann auch mit Hilfe der ersten Ableitung die Stelle $x = 0$ herausfinden (3 Punkte) und das Monotonieverhalten (s. oben) begründen, denn $f'(x) < 0$ für $x > 0$ und $f'(x) > 0$ für $x < 0$ (2 Punkte), denn der Ausdruck e^{-x^2} erfüllt für alle $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x^2} > 0$ (1 Punkt). Daraus ergibt sich dann, dass bei $x = 0$ ein globales Maximum vorliegen muss (2 Punkte).

(*Bemerkung:* Es soll auch einen Punkt geben, wenn die zweite Ableitung berechnet wird und herausgefunden wird, dass $f''(0) = 0$ gilt und dieser Weg dann nicht weiter verfolgt wird.)

Lösung zur Aufgabe 4 (April WiSe 2008/2009, VT A4) (7 Punkte)

Die Funktion $f : x \mapsto \cos(x\pi) - 2^{x-2}$ ist auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig und es gilt $f(0) = \cos(0) - \frac{1}{4} > 0$ und $f(1) = \cos(1) - \frac{1}{2} < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert $x_0 \in]0, 1[$ so dass, $f(x_0) = 0$ d.h. x_0 ist eine Lösung der Gleichung $\cos(x\pi) = 2^{x-2}$.

Lösung zur Aufgabe 5 (Juli SoSe 2009, VT A3) (6 Punkte)

Sei $f(x) = x^5 + 3x - 3$. Die Nullstellen von f sind genau die Lösungen der Gleichung $x^5 + 3x = 3$.

Die Funktion f hat mindestens eine Nullstelle:

Das Polynom f ist stetig mit $f(0) = -3 < 0$, $f(1) = 1 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in]0, 1[$ mit $f(\xi) = 0$.

Die Funktion f hat höchstens eine Nullstelle:

Weil die Ableitung $f'(x) = 5x^4 + 3 > 0$ positiv und deshalb die Funktion f **streng** monoton wachsend ist, kann es also keine weiteren Nullstellen geben.

Lösung zur Aufgabe 6 (Februar WiSe 2007/2008, VT A5)

(7 Punkte)

Erste Variante: Mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Sei $f :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto \ln(1+r)$ und $x > 0$ beliebig, aber fest. f ist differenzierbar auf $]0, x[$ und nach dem Mittelwertsatz existiert somit ein $\xi \in]0, x[$ mit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi), \text{ d.h. } \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+\xi} \geq \frac{1}{1+x}$$

Damit gilt

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \geq \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}.$$

Zweite Variante: Sei $g :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. Zu beweisen ist nun, dass $g(x) \geq 0$ für alle $x > 0$. Die Funktion g ist differenzierbar auf $] -1, \infty[$ und für alle $x \in]0, \infty[$ gilt

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} \geq 0.$$

Daher ist g auf $]0, \infty[$ monoton wachsend, d.h. $g(x) \geq g(0) = 0$ für alle $x \geq 0$.

Block 2.2 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz**Lösung zur Aufgabe 1** (Oktober SoSe 2008, RT A5)

(9 Punkte)

a) Bestimme zunächst die Ableitung von f :

$$f'(x) = 2x \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Diese verschwindet genau dann, wenn

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{\pi}{4} = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x^2 = (4k + 1)\frac{\pi}{4}$$

ist, wobei wegen $x^2 \geq 0$ auch $k \geq 0$ sein muss.Prüfe, für welche k die Lösung in $[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$ liegt:Für $k = 0$ ist $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \in [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$ aber für $k = 1$ gilt schon $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\pi} \notin [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$.Also sind die einzigen Extrempunktkandidaten $x_0 = 0$ und $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.Wir überprüfen noch f' auf Vorzeichenwechsel:

- Für $x < x_0 = 0$ nahe bei x_0 ist $f'(x) < 0$ und für $x > x_0 = 0$ ist $f'(x) > 0$. Demnach ist bei $x_0 = 0$ ein lokales Minimum mit $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Für $x < x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ nahe bei x_1 ist $f'(x) > 0$ und für $x > x_1$ ist $f'(x) < 0$. Demnach ist bei $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ein lokales Maximum mit $f(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}) = 1$.
- Für $x < x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ nahe bei x_2 ist $f'(x) > 0$ und für $x > x_2$ ist $f'(x) < 0$. Demnach ist bei $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ein lokales Maximum mit $f(-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}) = 1$.

Untersuche noch die Intervallgrenzen: $f(\pm\sqrt{\pi}) = \sin(\frac{5}{4}\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Also liegen an den Rändern globale Minima und bei $x_{1,2}$ globale Maxima.b) Da bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bei $x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ein lokales Maximum von f liegt und f' zwischen diesen beiden Stellen keine weitere Nullstelle hat (und stetig ist), ist für alle $a \leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ f auf $[0, a]$ streng monoton und damit umkehrbar. Für $a > \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gilt dies nicht mehr. Also ist $a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Lösung zur Aufgabe 2 (Juli SoSe 2008, VT A6)

(6 Punkte)

- Der Integrand ist immer positiv und daher ist F streng monoton steigend. Damit folgt, dass F seine Extrema am Rand annimmt, also an den Stellen

$$x = 0, \quad \text{und} \quad x = 2\pi$$

- **Alternativ** (ausführlich) Der Integrand $1 + \sin^4(t)$ ist stetig auf $I := [0, 2\pi]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $F'(x) = 1 + \sin^4(x)$. Kandidaten für Extremalstellen sind die inneren Punkte von I mit $F'(x) = 0$ und die Randpunkte des Intervalls $[0, 2\pi]$. Offensichtlich gilt $F'(x) > 0$ für alle $x \in I$, somit gibt es im Inneren des Intervalls keine Extrema und die Funktion F ist monoton wachsend. Daher wird das globale (und somit lokale) Minimum am linken Rand $x = 0$ angenommen, und das globale (und somit lokale) Maximum am rechten Rand $x = 2\pi$.

Lösung zur Aufgabe 3 (Oktober SoSe 2009, VT A3)

(10 Punkte)

- a) Da direkt vorgegeben ist, dass $h'(x) \geq 0$, folgt sofort, dass h monoton wachsend sein muss.
- b) Um die Monotonie von k zu bestimmen, leiten wir k einmal ab:

$$k'(x) = -e^{-x} \cdot h(x) + e^{-x} \cdot h'(x) = e^{-x} \left(-h(x) + h'(x) \right).$$

Der Faktor e^{-x} ist immer positiv, da e -Funktion und der Faktor $-h(x) + h'(x)$ ist immer negativ, da

$$h'(x) \leq h(x) \quad \Leftrightarrow \quad -h(x) + h'(x) \leq 0.$$

Somit ist k eine monoton fallende Funktion.

- c) Fall 1 ($x < x_0$): Es ist $h(x) \geq 0$ und $h(x_0) = 0$ laut Voraussetzung. Wir wissen aus a), dass h monoton wachsend ist. Angenommen, dass nun für ein $x < x_0$ gelten würde $h(x) > 0$, so wäre das damit ein Widerspruch zu $h(x_0) = 0$ (dafür müsste h dann fallen).

Fall 2 ($x \geq x_0$): Es ist $h(x) \geq 0$ und $h(x_0) = 0$ laut Voraussetzung. Damit ist auch $k(x) \geq 0$ und $k(x_0) = 0$. Wir wissen aus b), dass k monoton fallend ist. Zusammen mit der Nichtnegativität von k folgt sofort, dass $k(x) = 0$ für alle $x \geq 0$. Da aber $e^{-x} \neq 0$ für alle $x \geq x_0$, folgt sofort, dass dann $h(x) = 0$ für alle $x \geq x_0$ sein muss.

Lösung zur Aufgabe 4 (Oktober SoSe 2010, VT A1)

(7 Punkte)

f ist aus stetigen Funktionen zusammengesetzt und deswegen stetig. (Bemerke, dass auch $1 + x^2 > 0$ für alle x gilt.) (1 Punkt)

Es ist $f(-2) < 0$ und auch $f(0) < 0$ (1 Punkt). Wir versuchen eine Stelle x im Intervall $[-2, 0]$ zu finden, so dass $f(x) > 0$ gilt. Z.B. ist $f(-1) = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2} > 0$, da $e > 1$ (2 Punkte)

Mit dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen folgt, dass im Intervall $[-2, -1]$ und damit auch im Intervall $[-2, 2]$ eine Nullstelle liegen muss. (1 Punkt)

Da das Intervall $[-2, 0]$ kompakt ist, lässt sich der Satz vom Maximum/Minimum anwenden (1 Punkt), und es folgt, dass f auf dem Intervall sowohl Maximum als auch Minimum annimmt. (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 5 (Oktober SoSe 2008, VT A2)

(8 Punkte)

Die Funktion f ist stetig (1 Punkt) und es gilt $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 + e^3 - 2 > 0$ (2 Punkte). Nach dem Zwischenwertsatz (1 Punkt) für stetige Funktionen existiert also ein $\xi \in (0, 1)$ mit $f(\xi) = 0$ (1 Punkt). Es existiert also mindestens eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ (1 Punkt). Da $f'(x) = 1 + 3e^{3x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt die strenge Monotonie von f (1 Punkt) und daraus die Eindeutigkeit der Nullstelle (1 Punkt).

Lösung zur Aufgabe 6 (April WiSe 2007/2008, VT A4)

(8 Punkte)

Variante 1 (Mittelwertsatz): Es gilt $f(1) = f(2) = 0$ (2 Punkte). Da f auf $]1, 2[$ differenzierbar ist, existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in]1, 2[$ (2 Punkte) mit 0 $\stackrel{(2 \text{ Punkte})}{=}$

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \stackrel{(2 \text{ Punkte})}{=} f'(\xi).$$

Variante 2 (Zwischenwertsatz): Die Ableitung $f'(x) = \ln(x) + \frac{x-2}{x}$ (2 Punkte) von f ist als Summe stetiger Funktionen für alle $x \in \mathbb{R}^+$ stetig (2 Punkte) und es gilt $f'(1) = -1$ und $f'(2) = \ln(2) > 0$ (2 Punkte). Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann ein $\xi \in]1, 2[$, so dass $0 = f'(\xi)$ (2 Punkte).

Block 2.3 - Funktionsuntersuchungen, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz

Lösung zur Aufgabe 1

(Juli SoSe 2008, RT A4)

(7 Punkte)

1. Weg:

$f'(x) = -e^{\cos x} \sin x$, $f''(x) = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x)$. Dann ist

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Einsetzen in die zweite Ableitung liefert

$$f''(k\pi) = (-1)^{k+1} e^{(-1)^k} \begin{cases} < 0, & k \text{ gerade} \\ > 0, & k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Also hat f $\begin{cases} \text{lokale Maxima bei } (2k\pi|e) & , k \in \mathbb{Z} \\ \text{lokale Minima bei } (2(k+1)\pi|\frac{1}{e}) & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

2. Weg:

Da die Funktion $x \mapsto e^x$ monoton wachsend ist, hat f seine Extrema genau da, wo der Kosinus seine Extrema hat.

Also: f hat $\begin{cases} \text{lokale Maxima bei } (2k\pi|e) & , k \in \mathbb{Z} \\ \text{lokale Minima bei } (2(k+1)\pi|\frac{1}{e}) & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Lösung zur Aufgabe 2

(Juli SoSe 2008, VT A5)

(7 Punkte)

(a) Aus $x^2 \geq 0$ und $1 + x^2 > 0$ folgt $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$. Mit $f(0) = 0$ erhalten wir $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$. Weiter folgt $f(x) < 1$ aus $x^2 < 1 + x^2$. Mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ gilt $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$.

(b) Es gilt

$$g(x) = \begin{cases} e & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{1}{e} & x < 0 \end{cases}$$

Mit $\frac{1}{e} < 1 < e$ folgt $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \frac{1}{e}$ und $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = e$.

Lösung zur Aufgabe 3 (Februar WiSe 2010/2011, VT A2)

(11 Punkte)

- a) Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist stetig auf \mathbb{R} . Die Funktionen $x \mapsto 17x^3 - x$ und $\frac{1}{x^2+1}$ sind ebenfalls stetig auf \mathbb{R} . Da f somit aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist, folgt, dass f stetig auf \mathbb{R} und somit auch auf $[-1, 1]$ ist. (1 Punkt) Nach dem Satz vom Maximum und Minimum nimmt jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion ihr Maximum und Minimum an. (1 Punkt)

Es gilt $f(0) = -1$ und $f(1) = 17 - 1 - e/2 > 17 - 1 - 2 = 16$. (1 Punkt) Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x \in (0, 1) \subseteq [-1, 1]$ mit $f(x) = 0$. (1 Punkt)

Man beachte, dass hier nur die Existenz von Maximum, Minimum und Nullstelle zu zeigen war. Sie brauchen nicht berechnet zu werden.

- b) Wenn g im Innern des Intervalls ein lokales Extremum x_0 hätte, so müsste $g'(x_0) = 0$ gelten. (1 Punkt)

Es ist $g'(x) = e^x(x+2) + e^x = e^x(x+3)$. (1 Punkt) Nun ist $e^x > 0$ für alle x und weiterhin ist $(x+3) > 0$ für alle $x \in]-3, -1[$. (1 Punkt) Somit ist $g'(x) > 0$ für alle $x \in]-3, -1[$ und g besitzt im Innern von $[-3, -1]$ keine lokalen Extrema. (1 Punkt)

Auf dem abgeschlossenen Intervall besitzt g nach dem Satz vom Maximum und Minimum globale Extrema und diese müssen auf den Rändern liegen. (1 Punkt) Da g wegen $g'(x) > 0$ für alle $x \in]-3, -1[$, ist g monoton wachsend. Damit ist bei $x_1 = -3$ das globale Minimum und bei $x_2 = -1$ das globale Maximum. (2 Punkte)

Lösung zur Aufgabe 4 (Februar WiSe 2007/2008, VT A1)

(6 Punkte)

Sei $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x \cos x - \sin x$.

Die Funktion f ist stetig auf $[0, \pi]$, $f(0) = 1 > 0$ und $f(\pi) = -e^\pi < 0$.

Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in [0, \pi]$, so dass $f(\xi) = 0$, d.h. $e^\xi \cos \xi = \sin \xi$.

Lösung zur Aufgabe 5 (Februar WiSe 2009/2010, VT A4)

(8 Punkte)

Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. (1 Punkt)

Es gilt $f(0) = \arctan 0 - \frac{1}{0+1} = 0 - 1 = -1 < 0$ (1 Punkt)

und $f(1) = \arctan 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4} > 0$. (1 Punkt)

Laut Zwischenwertsatz (1 Punkt) hat f also (mindestens) eine Nullstelle im Intervall $]0, 1[$. (1 Punkt)

Es ist $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ (1 Punkt) für alle x .

Laut Monotoniekriterium ist f also streng monoton wachsend. (1 Punkt)

Deshalb kann f höchstens eine Nullstelle haben. (1 Punkt)

Also hat f genau eine Nullstelle.

Lösung zur Aufgabe 6 (Oktober SoSe 2011, VT A3)

(8 Punkte)

- (a) Der Mittelwertsatz besagt, dass es ein $c \in [\pi/4, \pi/2]$ gibt, so dass $\frac{f(\pi/2) - f(\pi/4)}{\pi/2 - \pi/4} = f'(c)$ ist (1 Punkt). Eingesetzt in unserem Fall ergibt das $\frac{\sin(\pi/2) - \sin(\pi/4)}{\pi/4} = \cos(c)$ (1 Punkt). Da $\sin(\pi/2) = 1$ ist (1 Punkt) ist das äquivalent zu $1 - \sin(\pi/4) = \frac{\pi}{4} \cos(c)$. Diese Gleichung ist durch Umformen äquivalent zu $\frac{\pi}{4} \cos(c) + \sin \frac{\pi}{4} = 1$ (1 Punkt). (Anmerkung: Die Äquivalenz muss irgendwie ersichtlich sein, zumindest die benötigte Richtung der Implikation).

Alternativ: Auflösen nach x ergibt $x = \arccos\left(\frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}\right)$ (1 Punkt). Durch geschicktes Abschätzen kann man zeigen dass das im angegebenen Intervall eine Lösung hat (2 Punkte). Diese Lösung gibt eine Punkt weniger, da in der Aufgabenstellung explizit Anwendung des Mittelwertsatzes gefordert war.

- (b) Mit dem Mittelwertsatz gibt es ein $c \in [0, 1]$ so dass $\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(c)$ ist (1 Punkt). Das ist äquivalent zu $g(1) - g(0) = g'(c)$ (1 Punkt). Da nach Voraussetzung $g(1) - g(0) > 0$ ist (1 Punkt) folgt aus dieser Gleichung $g'(c) > 0$. (1 Punkt)

Alternativ: Da $g(1) - g(0) > 0$ und g stetig ist, muss es ein Intervall $[a, b] \subset [0, 1]$ geben, (1 Punkt), auf dem g streng monoton wächst (1 Punkt). Für alle c aus diesem Intervall gilt dann wegen dem Monotoniekriterium der ersten Ableitung (1 Punkt) $g'(c) > 0$ (1 Punkt). Hier war der Mittelwertsatz nicht vorgegeben, somit geben beide Lösungen gleich viele Punkte.

Block 3.1 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Lösung zur Aufgabe 1 (Februar WiSe 2010/2011, VT A1)

(10 Punkte)

Die Exponentialfunktion ist nach stetig. Außerdem ist für jedes $b \in \mathbb{R}$ die Funktion, die durch $x \rightarrow b + e^x$ gegeben ist, stetig. Also ist die Funktion f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (1 Punkt) Die Aufgabe ist also a und b so zu wählen, dass in den Punkten -1 und 0 , jeweils der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert und mit dem Funktionswert an der Stelle übereinstimmt.

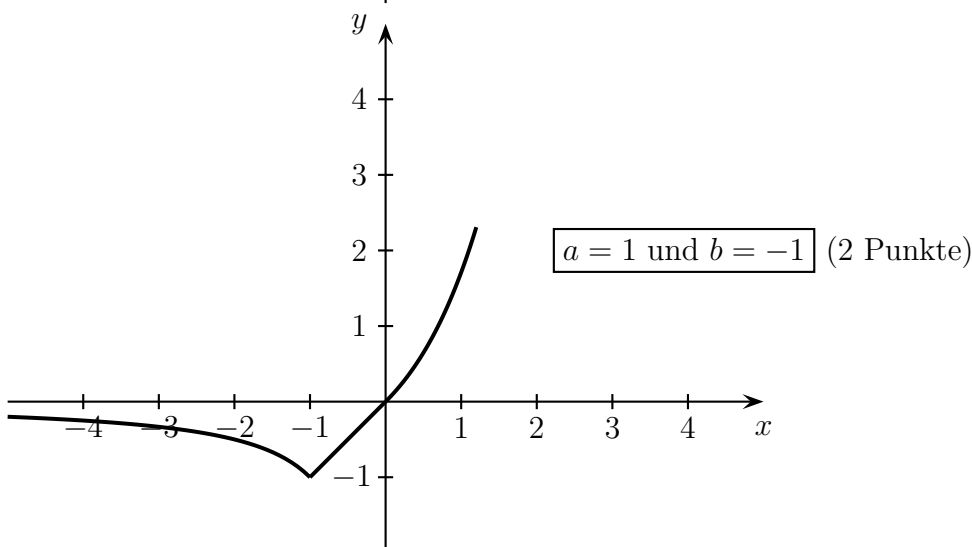
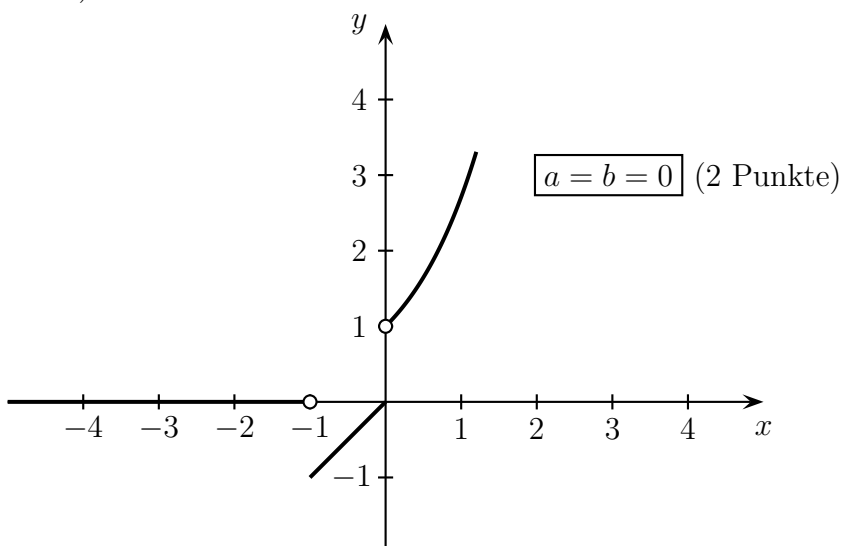
Aus

$$\lim_{x \uparrow -1} f(x) = \lim_{x \uparrow -1} \frac{a}{x} = -a \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{x \downarrow -1} x = -1 = f(-1)$$

folgt, dass f für $a = 1$ stetig in -1 ist. (2 Punkte) Aus

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} x = 0 = f(0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} b + e^x = b + e^0 = b + 1$$

folgt, dass f für $b = -1$ stetig in 0 ist. (2 Punkte) Insgesamt ist f für $a = 1$ und $b = -1$ stetig auf \mathbb{R} . (1 Punkt)



Lösung zur Aufgabe 2 (Februar WiSe 2007/2008, RT A3)

(8 Punkte)

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

Lösung zur Aufgabe 3 (April WiSe 2007/2008, RT A2)

(8 Punkte)

1. Weg: Untersuche f zunächst auf Stetigkeit: $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} x^2 e^{\sin^2(x)} + c = c$ (2 Punkte).

$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} 1 = 1 = f(0)$ (1 Punkt). Also ist f in $x = 0$ genau dann stetig, wenn $c = 1$ ist (1 Punkt).

Untersuche nun die Differenzierbarkeit von f mit gewähltem $c = 1$: $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 e^{\sin^2(x)} + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} x e^{\sin^2(x)} = 0$ (2 Punkte). Weiter gilt: $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1 - 1}{x - 0} = 0$ (1 Punkt). Also ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$ (1 Punkt).

2. Weg: $\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 e^{\sin^2(x)} + c - 1}{x}$ (2 Punkte). Dieser Term kann nur konvergieren, wenn auch der Zähler gegen null strebt. Es gilt aber $\lim_{x \searrow 0} x^2 e^{\sin^2(x)} + c - 1 = c - 1$.

1. Es muss also $c = 1$ gewählt werden (2 Punkte). Nun gilt: $\lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 e^{\sin^2(x)} + c - 1}{x} =$

$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 e^{\sin^2(x)}}{x} = \lim_{x \searrow 0} x e^{\sin^2(x)} = 0$ (2 Punkte). Ebenso gilt $\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{1 - 1}{x - 0} = 0$ (1 Punkt). Also ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$ (1 Punkt).

Lösung zur Aufgabe 4 (April WiSe 2010/2011, VT A1)

(10 Punkte)

a) Die Funktion ist für alle $x \neq 0$ stetig, da sie aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist. (1 Punkt)

Auch an der Stelle $x = 0$ ist f stetig, denn es gilt: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ (1 Punkt), weil $0 \leq |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ (die \sin -Funktion ist beschränkt) (1 Punkt) und $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x|$ (1 Punkt).

b) Die Funktion ist für alle $x \neq 0$ differenzierbar, da sie aus differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt ist. (1 Punkt) An der Stelle $x = 0$ ist f nicht differenzierbar (1 Punkt), denn der Grenzwert (1 Punkt) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (1 Punkt) existiert nicht. (1 Punkt)

(Wählt man z.B. $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}n}$, so hat die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mehrere Häufungspunkte.)

Lösung zur Aufgabe 5 (Juli SoSe 2010, VT A5)

(10 Punkte)

a) (4 Punkte)

Für beliebiges b und $x < 5$ bzw. $x > 5$ ist f als Polynom stetig. (1 Punkt) Kritische Stelle ist also $x = 5$. Damit f stetig in 5 ist, muss gelten $\lim_{x \searrow 5} f(x) = \lim_{x \nearrow 5} f(x) = f(5)$. (1 Punkt)

Es gilt $\lim_{x \searrow 5} f(x) = 5b - 2 = f(5)$ und $\lim_{x \nearrow 5} f(x) = 23$. (1 Punkt) Also muss gelten $5b - 2 = 23$, also $b = 5$. (1 Punkt) **Punkt abzug**, falls nicht klar wird, dass b einziger Wert ist, falls die Implikation also nicht richtig deutlich wird. Z.B. schreiben viele wahrscheinlich: "für $b = 5$ ist f stetig".

b) (6 Punkte)

Für $x \neq 0$ ist g als Produkt und Hintereinanderausführung differenzierbarer Funktionen differenzierbar. (1 Punkt) Um zu untersuchen, ob g in 0 differenzierbar ist, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (1 \text{ Punkt})$$

Wir zeigen $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$. Da \cos durch 1 und -1 beschränkt ist (1 Punkt), gilt

$$\left| x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0 \right| = |x| \left| \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x| \quad (1 \text{ Punkt})$$

und damit

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0,$$

also ist g in allen $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. (2 Punkte)

Block 3.2 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Lösung zur Aufgabe 1 (Juli SoSe 2009, VT A1)

(5 Punkte)

Weil $\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$ die Komposition der stetigen Funktionen $\sin(x)$ und $\frac{\pi}{5}x$ ist, ist $g(x)$, $x \neq 0$ ein Quotient von stetigen Funktionen, und diese sind überall dort stetig, wo sie definiert sind. D.h. g ist stetig für $x \neq 0$. Für die Stetigkeit in $x = 0$ muss gelten

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = a.$$

Nach dem Satz von Bernoulli-l'Hospital ist

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta)}{1} = 1.$$

Daraus folgt: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)}{x} = \frac{\pi}{5} = a$

Lösung zur Aufgabe 2 (Februar WiSe 2009/2010, VT A5)

(8 Punkte)

Für alle $x > 0$ und alle $x < 0$ ist f jeweils als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. (1 Punkt)

Um an der Stelle $x = 0$ differenzierbar zu sein muss f zunächst stetig sein. (1 Punkt)

Es gilt $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} e^{ax+1} = e = f(0)$ (1 Punkt)

und $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \sin(2x) + b \cos(x) = b$. (1 Punkt)

Deshalb muss $b = e$ sein. (1 Punkt)

Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{e^{ax+1} - e}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \nearrow 0} \frac{a e^{ax+1}}{1} = a \cdot e \text{ (1 Punkt)}$$

Der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sin(2x) + e \cos(x) - e}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{2 \cos(2x) - e \sin(x)}{1} = 2 \text{ (1 Punkt)}$$

Damit f in $x = 0$ differenzierbar ist muss also $a = \frac{2}{e}$ gelten. (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 3 (Dezember WiSe 2008/2009 (Probeklausur), RT A4) (5 Punkte)

Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f differenzierbar als Produkt und Komposition differenzierbarer Funktionen mit Ableitung $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ($x \neq 0!$). Es ist noch die Differenzierbarkeit in $x = 0$ zu gewährleisten.

Wir bestimmen zunächst a so, dass f stetig ist in $x = 0$. Das gilt genau dann, wenn $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, da $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ und $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Mit $f(0) = a$ folgt: f ist stetig in $x = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

Setze nun $a = 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Daher ist für $a = 0$ f auch differenzierbar in $x = 0$ mit $f'(0) = 0$, also insgesamt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Bemerkung: f ist nicht stetig differenzierbar in $x = 0$, d.h. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \neq f'(0)$, denn $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht, folglich auch nicht $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

Lösung zur Aufgabe 4 (Oktober SoSe 2011, VT A2)

(12 Punkte)

(a) f ist auf $]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ stetig, da $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto 1/x$ dort stetig sind (1 Punkt).

Untersuche Stetigkeit in 0: L'Hospital führt auf $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2(x)}{1}$ (1 Punkt). Da $1 + \tan^2(0) = 1$ ist (1 Punkt) folgt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ (1 Punkt). Man muss also $a = 1$ wählen (1 Punkt, muss explizit da stehen), dann ist f auf ganz $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ stetig. Alternativ: Ableitung des Tangens $\frac{1}{\cos^2(x)}$.

Andere Lösungsmöglichkeit, gibt gleich viele Punkte: f ist auf $]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ stetig, da $x \mapsto \tan(x)$ und $x \mapsto 1/x$ dort stetig sind (1 Punkt). Untersuche Stetigkeit in 0: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)}$ (1 Punkt) der zweite Faktor geht gegen 1 (1 Punkt) und aus der Vorlesung ist bekannt dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ist (1 Punkt). Daraus folgt ebenfalls dass $a = 1$ ist (1 Punkt).

(b) f ist auf $]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ differenzierbar, als Produkt differenzierbarer Funktionen (1 Punkt) Untersuche Differentialquotient in 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Mit l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(x)}{2x} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ (aus Teil (a), 1 Punkt) und $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x) = 0$ (1 Punkt) folgt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2(x)}{2x} = 0$ (1 Punkt) (kann alternativ mit nochmaliger Anwendung von l'Hospital bewiesen werden, Punkte entsprechend insgesamt 3 für diesen Teil). Somit existiert der Grenzwert, also ist f in 0 differenzierbar, und $f'(0) = 0$ (1 Punkt).

Alternativ: Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = \frac{(1 + \tan^2(x))x - \tan(x)}{x^2}$ (2 Punkte) Im Grenzwert für $x \rightarrow 0$ führt l'Hospital (1 Punkt) und ein bisschen rechnen (1 Punkt) ebenfalls aufs richtige Ergebnis (1 Punkt) (die übrigen Punkte wie in der ersten Version der Lösung). Setzt man als Ableitung für den Tangens $\frac{1}{\cos^2(x)}$ ein, so wird die Rechnung mühsamer, führt aber natürlich auch auf das richtige Ergebnis.

Lösung zur Aufgabe 5 (Juli SoSe 2011, VT A1)

(9 Punkte)

- (a) (4 Punkte) Die Funktion ist stetig auf den Teilintervallen $] - \infty, \pi/2[$ und $] \pi/2, \infty[$, da die Sinusfunktion sowie jede Polynomfunktion stetig ist (1 Punkt). Zu prüfen ist also der Punkt $x = \pi/2$. Dort gilt

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} f(x) = \lim_{x \nearrow \pi/2} \sin(x) = \sin(\pi/2) = 1 \quad (1 \text{ Punkt für die Grenzwertbestimmung}).$$

Nach Definition ist $f(\pi/2) = a\frac{\pi}{2} + b$. Damit die Funktion stetig ist, muss also gelten

$$a\frac{\pi}{2} + b = 1 \quad (1 \text{ Punkt für die Formulierung der Bedingung}).$$

Damit kann man einen der beiden Parameter eliminieren, also

$$b = 1 - a\frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2}{\pi}(1 - b).$$

Die Lösung ist also

$$L = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b = 1 - a\frac{\pi}{2}\}, \quad \text{oder} \quad L = \{(a, 1 - a\frac{\pi}{2}), a \in \mathbb{R}\}.$$

(1 Punkt dafür, wenn die Lösung so oder ähnlich aufgeschrieben wurde. Es muss klar sein, dass ein Parameter durch den anderen ausgedrückt wird, und der andere frei gewählt werden kann).

- (b) (5 Punkte) Die Funktion ist differenzierbar auf den Teilintervallen $] - \infty, \pi/2[$ und $] \pi/2, \infty[$, da die Sinusfunktion sowie jede Polynomfunktion differenzierbar ist (1 Punkt). Die Ableitung ist

$$f'(x) = \cos(x), x < \pi/2, \quad \text{bzw.} \quad f'(x) = a, x > \pi/2 \quad (1 \text{ Punkt}).$$

Es gilt also

$$\lim_{x \searrow \pi/2} f'(x) = a \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow \pi/2} f'(x) = \lim_{x \nearrow \pi/2} \cos(x) = 0 \quad (1 \text{ Punkt}).$$

Daraus folgt $a = 0$ (1 Punkt). Aus Teil (a) folgt, da jede differenzierbare Funktion stetig ist, dass $b = 1$ sein muss (1 Punkt).

Alternativer Lösungsweg: Die Funktion ist differenzierbar auf den Teilintervallen $] - \infty, \pi/2[$ und $] \pi/2, \infty[$, da die Sinusfunktion sowie jede Polynomfunktion differenzierbar ist (1 Punkt). Im Punkt $x = \pi/2$ werden links- und rechtsseitige Ableitung betrachtet. Man erhält

$$\lim_{x \searrow \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x \searrow \pi/2} \frac{ax + b - (a\frac{\pi}{2} + b)}{x - \pi/2} = \lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{a(x - \pi/2)}{x - \pi/2} = a$$

und wegen der Stetigkeit

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{\sin(x) - 1}{x - \pi/2} = \lim_{x \nearrow \pi/2} \frac{\cos(x)}{1} = 0,$$

mit de l'Hospital. (1 Punkt). Daraus folgt ebenfalls $a = 0$ (1 Punkt), und dann auch $b = 1$ (1 Punkt).

Block 3.3 - Stetigkeit, Differenzierbarkeit

Lösung zur Aufgabe 1 (Oktober SoSe 2009, VT A1)

(8 Punkte)

g ist als Quotient aus Polynomen, die automatisch überall stetig sind, zunächst für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ stetig.

Es gilt mit

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) \quad \text{und} \quad x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \quad (\text{p-q-Formel für die Nullstellen}),$$

dass

$$\lim_{x \nearrow -3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \nearrow -3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \nearrow -3} \frac{x+1}{x+3} = -\infty \neq -\frac{2}{3} = g(-3)$$

und damit ist g an der Stelle $x = -3$ nicht stetig.

Für die andere Stelle $x = 3$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} \stackrel{\text{L'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{2}{3} = g(3)$$

und somit ist g an der Stelle $x = 3$ stetig.

Insgesamt ist g also für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ stetig.

Lösung zur Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2008, VT A5)

(8 Punkte)

f ist stetig, da nach Voraussetzung differenzierbar (1 Punkt). Damit ist g in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ eine Komposition stetiger Funktionen (1 Punkt), wobei der Nenner in diesem Bereich nie Null wird (1 Punkt). Also ist g in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ stetig (1 Punkt).

Die Stetigkeit von g im Punkt x_0 wird nun getrennt bewiesen. Aus der Definition des Grenzwertes folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Der letzte Grenzwert existiert, da f differenzierbar ist (1 Punkt) und ergibt $f'(x_0)$ nach Definition der Ableitung (1 Punkt). Damit folgt aber

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f'(x_0) = g(x_0) \quad (1 \text{ Punkt}),$$

also die Stetigkeit von g am Punkt x_0 (1 Punkt).

Lösung zur Aufgabe 3 (Februar WiSe 2008/2009, RT A5)

(7 Punkte)

Variante 1: Eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit von f in $x = 0$ ist die Stetigkeit von f in diesem Punkt, d.h. wenn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = c$. Nach der Regel von

Bernoulli-L'Hospital gilt: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$. Also ist f in $x = 0$ genau dann

stetig, wenn $c = 1$. Für $c = 1$ gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0 \end{aligned}$$

Demnach ist $f'(0) = 0$ und für $x \neq 0$ ist die Funktion als Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$. Zusammenfassend:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Variante 2: Nach der Regel von Bernoulli-L'Hospital gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - c}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - cx}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - c}{2x}$$

wobei der letzte Grenzwert genau dann existiert, wenn $c = 1$. Für $c = 1$ gilt dann $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0$, also $f'(0) = 0$. Für $x \neq 0$ ist die Funktion als Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit Ableitung $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$. Zusammenfassend:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Lösung zur Aufgabe 4 (April WiSe 2008/2009, VT A2)

(7 Punkte)

Variante 1: f ist im Punkt x_0 differenzierbar, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

In unserem Fall ist die Funktion f stückweise definiert und wir betrachten:

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

und

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{ax + b - 2}{x} = a + \lim_{x \searrow 0} \frac{b - 2}{x}$$

Die Funktion f ist daher differenzierbar in $x = 0$ für $a = 0$ und $b = 2$ und es gilt $f'(0) = 0$.

Variante 2: Notwendig für die Differenzierbarkeit in $x = 0$ ist die Stetigkeit. Es gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} (x^2 + 2) = 2 = f(0)$$

und

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} (ax + b) = b$$

Die Funktion f ist also stetig in $x = 0$ für $b = 2$. Weiterhin gilt

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

und

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{ax + 2 - 2}{x} = a$$

Daher ist die Funktion f in $x = 0$ differenzierbar für $a = 0$ und es gilt $f'(0) = 0$.

Lösung zur Aufgabe 5 (Februar WiSe 2008/2009, VT A3)

(8 Punkte)

a) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + n\pi}} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$$

b) Es ist

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{\sqrt{1 + n\pi}}\right) = \frac{1}{\sin(1 + n\pi - 1) + 2} = \frac{1}{\sin(n\pi) + 2} = \frac{1}{2}$$

und

$$f(z_n) = f\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi}}\right) = \frac{1}{\sin(1 + \frac{\pi}{2} + 2n\pi - 1) + 2} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}) + 2} = \frac{1}{3}$$

Daher ist

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \frac{1}{2} \text{ und } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = \frac{1}{3}.$$

c) Die Folgen (x_n) und (z_n) konvergieren beide gegen 0, aber $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n)$.
Daher ist f im Punkt $x = 0$ unstetig.

d) Die Funktion f ist in $x = 0$ nicht stetig und daher auch nicht differenzierbar.

Block 4.1 - Polynome, Taylorpolynome

Lösung zur Aufgabe 1 (Februar WiSe 2008/2009, VT A2) (8 Punkte)

- a) P ist ein Polynom 5. Grades und hat genau 5 Nullstellen in \mathbb{C} . Da die komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms in konjugiert-komplexen Paaren auftreten, ist die Anzahl der reellen Nullstellen ungerade. Daher hat P mindestens eine reelle Nullstelle. P hat mit i auch $-i$ als doppelte Nullstelle und eine einfache reelle Nullstelle. Damit gibt es drei verschiedene Nullstellen.
- b) Aus a) folgt, dass $P(x) = a(x-1)(x-i)^2(x+i)^2 = a(x-1)((x-i)(x+i))^2 = a(x-1)(x^2+1)^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Variante 1: Wäre P ungerade, dann müsste $P(0) = 0$ gelten. Jedoch ist $P(0) = -a \neq 0$, also ist P nicht ungerade.
- Variante 2: Wäre P ungerade, dann müsste $P(-1) = -P(1) = 0$ gelten. Jedoch ist $P(-1) \neq 0$, also ist P nicht ungerade.
- Variante 3: Wäre P ungerade, dann müsste $P(-x) = -P(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Jedoch ist $P(-x) = a(-x-1)(x^2+1)^2 \neq -P(x)$, also ist P nicht ungerade.
-

Lösung zur Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2008, VT A1) (6 Punkte)

Es gilt $p(-(2-i)) = p(2-i) = 0$, da p gerade und $z_1 = 2-i$ eine Nullstelle ist (1 Punkt). Also ist auch $z_2 = -2+i$ eine Nullstelle von p (1 Punkt). Da p nur reelle Koeffizienten hat, ist jede komplex konjugierte Nullstelle ebenfalls eine Nullstelle (1 Punkt). Das heißt $z_3 = 2+i$ und $z_4 = -2-i$ sind weitere Nullstellen (1 Punkt). Da $p \neq 0$ und p mindestens vier Nullstellen besitzt, muss p nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens vierten Grades sein (2 Punkte).

Lösung zur Aufgabe 3 (Februar WiSe 2009/2010, RT A4) (8 Punkte)

$$f'(x) = \sin(1-x) - 2x \quad (1 \text{ Punkt}), \quad f''(x) = -\cos(1-x) - 2 \quad (1 \text{ Punkt}), \quad f'''(x) = -\sin(1-x).$$

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = -2, \quad f''(1) = -3 \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = -2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2. \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \approx T_2\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{11}{8} \quad (1 \text{ Punkt}) = -1,325.$$

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}(x-1)^3 = \frac{-\sin(1-\xi)}{6}(x-1)^3 \quad \text{mit } 1 < \xi < x \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$\Rightarrow |R_2\left(\frac{3}{2}\right)| = \frac{\overbrace{|\sin(1-\xi)|}^{\leq 1}}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad (1 \text{ Punkt}) \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Lösung zur Aufgabe 4 (April WiSe 2008/2009, RT A5) (9 Punkte)

- a) - Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung erfüllt: $f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\frac{(1-1)!}{(1-x)^1}$.
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei erfüllt für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

- Induktionsbehauptung: $f^{(n+1)}(x) = -\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
- Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\
 &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \left(-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \right)' \\
 &= -(n-1)!(-1)(-n)(1-x)^{-n-1} \\
 &= -n!(1-x)^{-(n+1)} \\
 &= -\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

b) Das Taylorpolynom 3. Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ hat die Form

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3.$$

Es gilt $f(0) = \ln(1) = 0$, und mit a) gilt: $f'(0) = -1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = -2$, und daher

$$T(x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Lösung zur Aufgabe 5 (Juli SoSe 2008, VT A3)

(6 Punkte)

Die Funktion f ist ein Polynom sechsten Grades und wird durch eine Taylorentwicklung zehnten Grades exakt wiedergegeben. Daher gilt für das Taylorpolynom T_{10}

$$T_{10}(x) = f(x) = (x - 1)^6 + 3$$

Für das Restglied gilt daher

$$R_{10}(x) = f(x) - T_{10}(x) = 0, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Somit ist die kleinste obere Schranke für den Betrag des Restgliedes 0, d.h. es gilt

$$|R_{10}(x)| \leq 0$$

Lösung zur Aufgabe 6 (Februar WiSe 2008/2009, VT A5)

(7 Punkte)

Die Funktion f ist ein Polynom 9. Grades und wird durch ihr Taylorpolynom 9. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{3}{2}$ exakt wieder gegeben. Aus dieser Taylorentwicklung lesen wir ab:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0, \quad f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1, \quad \frac{f^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right)}{5!} = \frac{1}{5} \text{ d.h. } f^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right) = 24 \text{ und } f^{(7)}\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

Block 4.2 - Polynome, Taylorpolynome

Lösung zur Aufgabe 1 (Oktober SoSe 2011, RT A1)

(10 Punkte)

- (a) (2 Punkte) $P(0) = -12, P(1) = 20$. Da $P(0) < 0$ und $P(1) > 0$ ist und P stetig, folgt mit dem Zwischenwertsatz dass P eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ hat.
- (b) (2 Punkte) $P(2i) = 32 - 40i - 20 + 40i - 12 = 0$
- (c) (2 Punkte) $(2z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 20z - 12) : (z^2 + 4) = 2z^2 + 5z - 3$
- (d) (4 Punkte) Aus (c) haben wir $P(z) = (z^2 + 4)(2z^2 + 5z - 3)$. Aus (b) folgt $z_1 = 2i$ und weil die Koeffizienten reell sind $z_2 = -2i$. (Alternativ: $z^2 + 4 = 0$ lösen). Lösen von $2z^2 + 5z - 3$ mit pq -Formel oder Summen/Produktregel ergibt $z_3 = 1/2$ und $z_4 = -3$.
-

Lösung zur Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2009, VT A2)

(5 Punkte)

Da p ein Polynom dritten Grades ist, hat p nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau drei Nullstellen in \mathbb{C} .

Die erste Nullstelle von p ist direkt vorgegeben und lautet $x_0 = 3 - 2i$. Da p nur reelle Koeffizienten hat, treten alle Nullstellen auch als konjugiert komplexe Zahlen auf und somit ist $x_1 = 3 + 2i$ auch eine Nullstelle von p . Die letzte Nullstelle muss $x_2 = 0$ sein, da

$$p(z) = z \cdot (z^2 + Az + B)$$

und damit

$$p(0) = 0 \cdot (\dots) = 0.$$

Lösung zur Aufgabe 3 (Juli SoSe 2010, RT A3)

(7 Punkte)

Es ist $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x)$, also

$$f'(x) = \frac{1}{2(x+1)}, \quad f''(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1}{(x+1)^3} \quad (2 \text{ Punkte})$$

Alternativ für die erste Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2(1+x)}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \quad (1 \text{ Punkt}) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \quad (1 \text{ Punkt}) \end{aligned}$$

und $R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_0)^3 = \frac{1}{6} \frac{x^3}{(1 + \xi)^3}$ für ein ξ zwischen x und 0 . (1 Punkt)

$|x^3|$ ist am größten an den Intervallgrenzen $-\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{10}$ und $\xi \mapsto \frac{1}{(1+\xi)^3}$ ist monoton fallend. Wenn $x \in [-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}]$, so folgt auch $\xi \in [-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}]$ und damit gilt

$$|R_2(x)| = \frac{1}{6} \frac{|x|^3}{(1 + \xi)^3} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{-3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9^3} = \frac{1}{4374}. \quad (2 \text{ Punkte})$$

Punktabzug, falls nicht begründet wird, warum man $x = 0, 1$ bzw. $\xi = -0, 1$ "einsetzt".

Lösung zur Aufgabe 4 (Oktober SoSe 2008, RT A3)

(9 Punkte)

a) Induktionsanfang: für $k = 0$ gilt

$$f^{(0)}(x) = (x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x + 0 \cdot (0 - 1))e^x = x^2 e^x = f(x)$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein festes, aber beliebiges $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(x) = (x^2 + 2kx + k(k - 1))e^x$$

Induktionsbehauptung: Dann ist zu beweisen:

$$f^{(k+1)}(x) = (x^2 + 2(k + 1)x + (k + 1)k)e^x$$

Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} ((x^2 + 2kx + k(k - 1))e^x)' \\ &= (2x + 2k)e^x + (x^2 + 2kx + k(k - 1))e^x \\ &= (x^2 + 2(k + 1)x + k(k + 1))e^x \end{aligned}$$

b) Nach Aufgabenteil (a) ist

$$f^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + k + k(k - 1)\right)e^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4} + k^2\right)\sqrt{e}.$$

Also ergibt sich das n -te Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{4} + k^2\right)\sqrt{e}}{k!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^k$$

Lösung zur Aufgabe 5 (April WiSe 2010/2011, VT A2)

(8 Punkte)

Es ist $T_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k$. (1 Punkt)

Es ist $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 + 2 \cdot 0 \cdot y(0) = -1$. (2 Punkte)

Es ist $y''(x) = 2y(x) + 2xy'(x) + 4x$ und damit $y''(0) = 2$. (2 Punkte)

Es ist $y'''(x) = 2y'(x) + 2y'(x) + 2xy''(x) + 4$ und damit $y'''(0) = -2 - 2 + 4 = 0$. (2 Punkte)

Damit ist $T_3(x) = 1 - x + x^2$. (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 6 (April WiSe 2008/2009, VT A5)

(10 Punkte)

a) Es gilt $R_5(x) = \frac{f^{(5+1)}(\xi)}{(5+1)!} x^{5+1}$ wobei ξ eine Zahl zwischen 0 und x ist. Da $f^{(k)}(\xi) = 0$ für alle $k \geq 5$ ist $R_5(x) = 0$.

b) Nach dem Satz von Taylor gilt: $f(x) = T_5(x) + R_5(x)$ und aus a) folgt $f(x) = T_5(x)$ damit ist f ein Polynom.

c) Es ist

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4.$$

Da $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, gilt $f(x) = f'(0)x + \frac{f'''(0)}{6}x^3$. Daher ist f ein ungerades Polynom dritten Grades. Wir wählen: $f(x) = 3x + \frac{1}{2}x^3$.

Block 4.3 - Polynome, Taylorpolynome

Lösung zur Aufgabe 1 (April WiSe 2007/2008, VT A1) (7 Punkte)

Die Nullstellen von p sind $1, -1, i$ und $-i$, also $p(x) = c(x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = c(x^2-1)(x^2+1)$, mit $c \in \mathbb{R}$ (4 Punkte). Wegen $p(0) = 1$ folgt $-c = 1 \Leftrightarrow c = -1$ (2 Punkte), also $p(x) = -(x^2-1)(x^2+1)$ (1 Punkt).

Lösung zur Aufgabe 2 (Juli SoSe 2008, VT A2) (7 Punkte)

Komplexe Polynome dritten Grades haben nach dem Fundamentalsatz der Algebra die Vielfachheiten eingerechnet genau drei Nullstellen. Da p ein komplexes Polynom mit reellen Koeffizienten ist, treten die Nullstellen immer in komplex konjugierten Paaren auf. Neben der angegebenen Nullstelle $z_1 = i$ ist somit auch $z_2 = \bar{z}_1 = -i$ eine Nullstelle. Da genau eine weitere Nullstelle existiert, muss diese reell sein, es existiert also genau eine reelle Nullstelle.

Lösung zur Aufgabe 3 (Februar WiSe 2008/2009, RT A4) (8 Punkte)

- a) f ist auf $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ definiert, da $2x+1 \geq 0$ erfüllt sein muss. Damit ist $D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty[$.
- b) f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen zweimal differenzierbar auf $]-\frac{1}{2}, +\infty[$. Es gilt $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ und $f''(x) = -\frac{1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$, und somit $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -1$. Das Taylorpolynom 2. Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet dann

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 = 1 + x - x^2$$

- c) Da f sogar dreimal differenzierbar ist auf $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ mit Ableitung $f^{(3)}(x) = \frac{3}{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}$, gilt für das Restglied

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 = \frac{1}{2(2\xi+1)^{\frac{5}{2}}}x^3,$$

wobei ξ zwischen $x_0 = 0$ und x liegt.

Lösung zur Aufgabe 4 (Oktober SoSe 2010, RT A2) (7 Punkte)

Das Taylorpolynom dritten Grades ist $T_3(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3$. (1 Punkt)

Es ist $y(0) = 1$ nach Voraussetzung.

$y'(x) = 2x^2 - 1 + 2xy(x)$, also $y'(0) = -1$. (1 Punkt)

$y''(x) = 4x + 2y(x) + 2xy'(x)$ (Produktregel!) (1 Punkt)

Also ist $y''(0) = 4 \cdot 0 + 2y(0) + 2 \cdot 0 \cdot y'(0) = 2$. (1 Punkt)

$y'''(x) = 4 + 2y'(x) + 2y''(x) + 2xy''(x) = 4 + 4y'(x) + 2xy''(x)$ (Produktregel!) (1 Punkt)

Also ist $y'''(0) = 0$. (1 Punkt)

Wir erhalten $T_3 = 1 - x + x^2$. (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 5 (Oktober SoSe 2009, VT A4)

(7 Punkte)

a) Da f ungerade ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -f(-x).$$

Das gilt insbesondere für $x = 0$, also

$$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

b) Es gilt zunächst nach Rechenregeln für das bestimmte Integral:

$$g(0) = 0 + \int_0^0 f(t) dt = 0.$$

Zudem gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$g'(x) = 1 + f(x)$$

und damit $g'(0) = 1 + f(0) = 1$. Somit lautet das Taylorpolynom ersten Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zu g

$$T_1(x) = x$$

Lösung zur Aufgabe 6 (Juli SoSe 2009, VT A4)

(5 Punkte)

Das n -te Taylorpolynom von f in $x = 1$ ist gegeben durch $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$.

a) $T_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = 2(x-1)^2 - 7(x-1) + 6$

b) Die Tangentengleichung durch den Punkt $(1, f(1))$ ist das Taylorpolynom vom 1. Grad in $x_0 = 1$, nämlich $y = -7(x-1) + 6$

Block 5.1 - Partialbruchzerlegung, Integration

Lösung zur Aufgabe 1 (Februar WiSe 2007/2008, VT A3)

(8 Punkte)

- a) $\frac{x}{(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-4}, \quad A, B \in \mathbb{R}$
- b) $\frac{3x+1}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}, \quad A, B \in \mathbb{R}$
- c) $\frac{x^3-2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$
- d) $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$
-

Lösung zur Aufgabe 2 (Oktober SoSe 2008, RT A4)

(9 Punkte)

- a) Wir machen zunächst eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{6}{x^2-2x} = \frac{6}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

Mit der Zuhaltmethode (alle Nullstellen treten einfach auf) erhalten wir $A = -3$ und $B = 3$.

Also

$$\int \frac{6}{x^2-2x} dx = \int \frac{-3}{x} + \frac{3}{x-2} dx = -3 \ln|x| + 3 \ln|x-2| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- b) Mit partieller Integration ($u = \ln x, v' = \frac{1}{x^2}$) erhält man

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big|_1^e = 1 - \frac{2}{e}$$

- c) Mit der Substitution $t = \sin x, dt = \cos x dx$ erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Lösung zur Aufgabe 3 (Februar WiSe 2010/2011, RT A2)

(13 Punkte)

a) Partielle Integration mit $u'(x) = x^3$ und $v(x) = \ln(x)$. (1 Punkt)

$$\text{Dann ist } \int_1^{e^2} x^3 \cdot \ln(x) dx \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \left[\frac{1}{4} x^4 \cdot \ln(x) \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} dx \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \frac{e^8}{2} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{e^2} = \frac{e^8}{2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} e^8 - \frac{1}{4} \right) = \frac{7e^8}{16} + \frac{1}{16}. \text{ (1 Punkt) für das richtige Ergebnis.}$$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} dx$: Wir machen zunächst eine Partialbruchzerlegung, welche ergibt $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ (1 Punkt)

Hier liegt ein uneigentliches Integral vor, also rechnen wir:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} dx &\stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} dx \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} [\ln x - \ln(x+1)]_1^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (\ln a - \ln(a+1) + \ln 2) \\ &\stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln 2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) + \ln 2 \right) = \ln 2, \text{ da } \ln \text{ eine stetige Funktion ist und } \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} = 0. \\ &\text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

c) Mit Substitution $t = x^2$ gilt $x = \sqrt{t}$ (man beachte, dass in den Integrationsgrenzen x nicht negativ ist) und $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. Die neuen Integrationsgrenzen sind $0^2 = 0$ und $2^2 = 4$. (1 Punkt) Es gilt also

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{1+x^4} dx &\stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{1}{1+t^2} dt \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \frac{1}{2} [\arctan t]_0^4 \\ &\stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \frac{1}{2} (\arctan 4 - \arctan 0) = \frac{1}{2} \arctan 4. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 4 (Oktober SoSe 2009, RT A5)

(12 Punkte)

a) Es gilt mit der Substitution $x = t^2 - 1$ und damit $dt = \frac{1}{2t} dx$:

$$\int_0^1 t \cos(t^2 - 1) dt = \int_{-1}^0 t \cos(x) \frac{1}{2t} dx = \left[\frac{1}{2} \sin(x) \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{2} \sin(-1)$$

b) Es gilt mit partieller Integration:

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

c) Es gilt mit der Substitution $t = \cos(x^3)$ und damit $dt = -3x^2 \sin(x^3) dx$:

$$\int x^2 (\cos(x^3))^2 \sin(x^3) dx = \int -\frac{1}{3} t^2 dt = -\frac{1}{9} t^3 + c = -\frac{1}{9} \cos^3(x^3) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

d) Es gilt mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ und damit $dx = 2\sqrt{x} dt = 2t dt$:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2t dt}{t^2 + t} = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \ln |t+1| + c = 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Lösung zur Aufgabe 5 (Juli SoSe 2011, RT A3)

(10 Punkte)

(a) (3 Punkte) Wir führen erst eine Partialbruchzerlegung des Nenners durch. Nennerpolynom faktorisieren ergibt $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, also Ansatz:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad (1 \text{ Punkt}).$$

Koeffizientenvergleich oder Einsetzen oder Zuhaltemethode ergibt $A = -1, B = 1$ (1 Punkt).

Somit erhalten wir für die Stammfunktionen

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = -\ln |x-2| + \ln |x-3| + c = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(1 Punkt fürs Ergebnis, Integrationskonstante und Beträge müssen dastehen. Beide Schreibweisen sind ok (Summe der Logarithmen oder Logarithmus des Quotienten).

(b) (4 Punkte) Wir machen die Substitution $u = 1+x$, also $du = dx$ (1 Punkt). Dann erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2 + 1} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{u(0)}^{u(a)} \frac{1}{u^2 + 1} du \quad (1 \text{ Punkt für uneigentliches Integral}) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^{a+1} \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan(u) \Big|_1^{a+1} \quad (1 \text{ Punkt für Stammfunktion}) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan(a+1) - \arctan(1) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad (1 \text{ Punkt für Einsetzen (Limes!) und Endresultat}). \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Substitution $u = 1+x$, also $du = dx$ (1 Punkt). Wir berechnen erst das unbestimmte Integral (Stammfunktion).

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x)^2 + 1} dx &= \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \arctan(u) + c \quad (1 \text{ Punkt für Stammfunktion}) \\ &= \arctan(1+x) + c. \end{aligned}$$

Einsetzen der Grenzen ergibt also

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2+1} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan(a+1) - \arctan(1) \quad (1 \text{ Punkt für uneigentliches Integral})$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad (1 \text{ Punkt für Einsetzen (Limes!) und Endresultat}).$$

Korrekturhinweis: Die Integrationsgrenzen können auf unterschiedliche Weise behandelt werden. Wichtig ist, dass der Grenzübergang bei der Behandlung des uneigentlichen Integrals deutlich gemacht wird, und auch am Schluss richtig eingesetzt und Grenzwert gebildet wird.

- (c) (3 Punkte) Partielle Integration mit $u'(t) = e^{-t}$, $v(t) = \sin(6t)$, $u(t) = -e^{-t}$, $v'(t) = 6 \cos(6t)$ führt auf

$$\int_0^{\pi/6} e^{-t} \sin(6t) dt = -e^{-t} \sin(6t) \Big|_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} (-e^{-t}) 6 \cos(6t) dt = 6 \int_0^{\pi/6} e^{-t} \cos(6t) dt.$$

- (1 Punkt). Zweite partielle Integration mit $u'(t) = e^{-t}$, $v(t) = \cos(6t)$, $u(t) = -e^{-t}$, $v'(t) = -6 \sin(6t)$:

$$6 \int_0^{\pi/6} e^{-t} \cos(6t) dt = -6e^{-t} \cos(6t) \Big|_0^{\pi/6} - 6 \int_0^{\pi/6} 6(-e^{-t})(-\sin(6t)) dt$$

$$= 6(e^{-\pi/6} + 1) - 36 \int_0^{\pi/6} e^{-t} \sin(6t) dt.$$

- (1 Punkt). Auflösen nach dem Integral:

$$\int_0^{\pi/6} e^{-t} \sin(6t) dt = \frac{6(e^{-\pi/6} + 1)}{37} \quad (1 \text{ Punkt}).$$

Alternativer Lösungsweg: Partielle Integration in die andere Richtung, $u'(t) = \sin(6t)$, $u(t) = \frac{-1}{6} \cos(6t)$, $v(t) = e^{-t}$, $v'(t) = -e^{-t}$. Dann

$$\int_0^{\pi/6} e^{-t} \sin(6t) dt = e^{-t} \left(\frac{-1}{6} \right) \cos(6t) \Big|_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} (-e^{-t}) \left(\frac{-1}{6} \right) \cos(6t) dt$$

$$= \frac{1}{6} (1 + e^{-\pi/6}) - \frac{1}{6} \int_0^{\pi/6} e^{-t} \cos(6t) dt.$$

- (1 Punkt) und 2. PI $u'(t) = \cos(6t)$, $u(t) = \frac{1}{6} \sin(6t)$, $v(t) = e^{-t}$, $v'(t) = -e^{-t}$. Dann

$$-\frac{1}{6} \int_0^{\pi/6} e^{-t} \cos(6t) dt = -\frac{1}{36} e^{-t} \sin(6t) \Big|_0^{\pi/6} - \frac{1}{36} \int_0^{\pi/6} e^{-t} \sin(6t) dt$$

$$= -\frac{1}{36} \int_0^{\pi/6} e^{-t} \sin(6t) dt.$$

- (1 Punkt). Auflösen nach dem Integral führt wieder auf

$$\int_0^{\pi/6} e^{-t} \sin(6t) dt = \frac{6(e^{-\pi/6} + 1)}{37} \quad (1 \text{ Punkt}).$$

Lösung zur Aufgabe 6 (Februar WiSe 2009/2010, VT A3)

(8 Punkte)

a) Die Substitution $t = f(x)$, $dt = f'(x) dx$ (1 Punkt) ergibt

$$\int f'(x) \cdot \sqrt{f(x)} dx = \int \sqrt{t} dt \text{ (1 Punkt)} = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c \text{ (1 Punkt)}$$
$$= \frac{2}{3} \sqrt{t}^3 + c = \frac{2}{3} \sqrt{f(x)}^3 + c \text{ (1 Punkt)}$$

b) Partielle Integration mit $u' = f''$, $u = f'$, (1 Punkt) $v = x$, $v' = 1$ (1 Punkt) ergibt

$$\int x f''(x) dx = x f'(x) - \int f'(x) dx \text{ (1 Punkt)} = x f'(x) - f(x) + c \text{ (1 Punkt)}$$

Block 5.2 - Partialbruchzerlegung, Integration

Lösung zur Aufgabe 1 (Februar WiSe 2009/2010, RT A3)

(8 Punkte)

Nullstelle des Nenners $x_1 = 1$ erraten (1 Punkt)

Polynomdivision: $x^3 + x^2 + 3x - 5 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 5)$ (1 Punkt)

weitere Nullstellen $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm 2i$ (1 Punkt)

Ansatz zur reellen PBZ: $\frac{8}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$ (1 Punkt)

Koeffizientenvergleich: $8 = A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1)$

$\Leftrightarrow 8 = (A + B)x^2 + (2A - B + C)x + (5A - C) \Rightarrow A + B = 0, 2A - B + C = 0, 5A - C = 8$ (1 Punkt)

Berechnung der Koeffizienten: $A = 1, B = -1, C = -3$ (1 Punkt)

Ergebnis: $\frac{8}{x^3+x^2+3x-5} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x-3}{x^2+2x+5}$ (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 2 (Juli SoSe 2010, RT A2)

(11 Punkte)

a) (4 Punkte)

Führe Partialbruchzerlegung durch: $\frac{2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ (1 Punkt) mit $A = -2$ und $B = 2$. (1 Punkt) (mit Rechnung: Zuhaltemethode, oder ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich) **Punkt abzug**, falls keine Rechnung.

Damit folgt

$$\int \frac{2}{(x-2)(x-1)} dx = \int \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} dx = 2 \ln|x-2| - 2 \ln|x-1| + C. \quad (2 \text{ Punkte})$$

Punkt abzug, falls Beträge im ln vergessen werden. **Punkt abzug**, falls Integrationskonstante weggelassen wird.

b) (3 Punkte)

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt &= -\cos t \cos(2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t (-2 \sin(2t)) dt \\ &= 1 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin(2t) dt \quad (1 \text{ Punkt}) \\ &= 1 - 2(\sin t \sin(2t)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos(2t) dt \\ &= 1 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt. \quad (1 \text{ Punkt}) \end{aligned}$$

Also folgt

$$-3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt = 1, \quad \text{also} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t) dt = -\frac{1}{3}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

c) (4 Punkte) Es gilt

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \searrow 0} \int_a^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (1 \text{ Punkt})$$

mit der Substitution $t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$ (geht auch mit $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$) folgt

$$\int_a^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \stackrel{(1 \text{ Punkt})}{=} \int_{\sqrt{a}}^{\pi} 2t \frac{\sin t}{t} dt = 2 \int_{\sqrt{a}}^{\pi} \sin t dt = -2 \cos t \Big|_{\sqrt{a}}^{\pi} = 2 + 2 \cos \sqrt{a} \quad (1 \text{ Punkt})$$

und damit

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \searrow 0} 2(1 + \cos \sqrt{a}) = 4. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Alternativ kann auch erst Stammfunktion berechnet werden und dann die Grenzen eingesetzt werden.

Punktabzug, falls nicht klar wird, dass Substitutionsregel angewendet wird, oder wie substituiert wird. Die schlampigen Bezeichnungen " $dx = 2t dt$ " oder ähnlich lassen wir durchgehen.

Lösung zur Aufgabe 3 (Juli SoSe 2009, RT A5)

(10 Punkte)

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{4}{x^2 - 9} dx &= \int \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} \right) dx = \int \left(\frac{-2/3}{x+3} + \frac{2/3}{x-3} \right) dx \\ &= -\frac{2}{3} \ln|x+3| + \frac{2}{3} \ln|x-3| + C \end{aligned}$$

b) Partielle Integration mit $v = x$, $u' = (x+3)^{\frac{1}{2}}$ anwenden:

$$\int x \sqrt{x+3} dx = \frac{2}{3} x(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (x+3)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} x(x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x+3)^{\frac{5}{2}} + C$$

c) Substitution mit $u = \cos(x^2)$, $du = -2x \sin(x^2) dx$ anwenden:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} 7x \sin(x^2) e^{\cos(x^2)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2} e^u du = \frac{7}{2} e^u \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{2} (e^{\frac{1}{2}} - 1)$$

d) Substitution mit $u = \sqrt[3]{x}$ ($\Rightarrow u^3 = x \Rightarrow 3u^2 du = dx$)

$$\int_1^8 \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \int_1^2 \frac{3u^2}{u^3 + u} du = \int_1^2 \frac{3u}{u^2 + 1} du = \frac{3}{2} \ln|u^2 + 1| \Big|_1^2 = \frac{3}{2} (\ln(5) - \ln(2))$$

Lösung zur Aufgabe 4 (Juli SoSe 2008, RT A3)

(11 Punkte)

a)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx &\stackrel{\substack{x=t^2 \\ dx=2t \, dt}}{=} \int_0^{\pi} 2t \sin t \, dt \\ &\stackrel{\substack{u=2t \\ v'=\sin t}}{=} -2t \cos t + \int_0^{\pi} 2 \cos t \, dt \\ &= -2t \cos t + 2 \sin t \Big|_0^{\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

b)

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{2x} \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_a^0 = \frac{1}{2}$$

c) **1. Weg:**

$$\int_1^e t^3 \ln t \, dt \stackrel{\substack{u=\ln t \\ v'=t^3}}{=} \frac{t^4}{4} \ln t \Big|_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{4} \, dt = \frac{t^4}{4} \ln t \Big|_1^e - \frac{t^4}{16} \Big|_1^e = \frac{1}{16}(3e^4 + 1)$$

2. Weg:

$$\int_1^e t^3 \ln t \, dt \stackrel{\substack{x=\ln t \\ dt=e^x dx}}{=} \int_0^1 e^{3x} x e^x \, dx \stackrel{\substack{u=x \\ v'=e^{4x}}}{=} \frac{1}{4} x e^{4x} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 e^{4x} \, dx = \frac{1}{16}(3e^4 + 1)$$

Lösung zur Aufgabe 5 (April WiSe 2008/2009, RT A2)

(10 Punkte)

a), (i) Variante 1: $\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \, dx = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) \, dx = x + \int \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} \, dx = x + \ln(x^2 + 1) + c$

Variante 2: $\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \, dx = \int \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) \, dx \stackrel{z=x^2+1}{=} x + \int \frac{1}{z} \, dz = x + \ln(x^2 + 1) + c$

a), (ii) Variante 1: $\int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) \, dx = \int_1^e (\ln x)' \ln x \, dx = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^e = \frac{1}{2}(\ln^2(e) - \ln^2(1)) = \frac{1}{2}$.

Variante 2: $\int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) \, dx \stackrel{z=\ln x}{=} \int_0^1 z \, dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$.

Variante 3: partielle Integration: $\int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx = \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^e = \frac{1}{2} (\ln^2(e) - \ln^2(1)) = \frac{1}{2}$$

a) $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} dx = \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \frac{1}{(1-x)^2} dx = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \Big|_0^a = \infty$, also existiert das uneigentliche Integral nicht.

Lösung zur Aufgabe 6 (Februar WiSe 2007/2008, VT A4)

(6 Punkte)

Erste Variante:

$$\int \frac{f'(x)f(x)}{2+f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2+f^2(x))'}{2+f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \ln |2+f^2(x)| + c, c \in \mathbb{R}$$

Zweite Variante: Mit Hilfe der Substitution $t = f^2(x) \Rightarrow dt = 2f'(x)f(x) dx$:

$$\int \frac{f'(x)f(x)}{2+f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2+t} dt = \frac{1}{2} \ln |2+t| + c = \frac{1}{2} \ln |2+f^2(x)| + c, c \in \mathbb{R}$$

Dritte Variante: Mit Hilfe der Substitution $t = 2+f^2(x) \Rightarrow dt = 2f'(x)f(x) dx$:

$$\int \frac{f'(x)f(x)}{2+f^2(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln |2+f^2(x)| + c, c \in \mathbb{R}$$

Lösung zur Aufgabe 1 (Juli SoSe 2008, RT A1)

(6 Punkte)

Wir machen den Ansatz $\frac{x+3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$.

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner erhalten wir

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1) &= x+3 \\ \Leftrightarrow (A+B)x^2 + (B+C)x + C &= x+3 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = -B$, $B = 1 - C$, $C = 3$ und damit $B = -2$ und $A = 2$.

Lösung zur Aufgabe 2 (Februar WiSe 2008/2009, RT A2)

(10 Punkte)

a)
$$\int \frac{5x-1}{(x+1)(x^2-1)} dx = \int \frac{5x-1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$$

Wir machen den Ansatz:

$$\frac{5x-1}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1},$$

wobei $A, B, C \in \mathbb{R}$ zu bestimmen sind. Multiplikation mit $(x+1)^2(x-1)$ und Koeffizientenvergleich/Zuhaltemethode ergibt $A = -1$, $B = 3$, $C = 1$. Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{5x-1}{(x+1)(x^2-1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-1}{(x+1)(x^2-1)} dx &= \int -\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + \ln|x-1| + c \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{3}{x+1} + c \end{aligned}$$

b) Variante 1:
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx \stackrel{z=x^2}{=} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin z dz = -\frac{1}{2} \cos z \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} (\cos(\pi) - \cos(0)) = 1$$

Variante 2:
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} -\frac{1}{2} (\cos(x^2))' dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2} (\cos(\pi) - \cos(0)) = 1$$

$$\text{c) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{1 - \frac{5}{2}} \frac{1}{x^{\frac{5}{2}-1}} \right|_1^a = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a^{\frac{5}{2}-1}} - 1 \right) = \frac{-1}{1 - \frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Lösung zur Aufgabe 3 (Februar WiSe 2009/2010, RT A5)

(10 Punkte)

a) Substitution $t = x^2 + 16$, (1 Punkt) $dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$ (1 Punkt) ergibt

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \int_{16}^{25} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \text{ (1 Punkt)} = \sqrt{t} \Big|_{16}^{25} \text{ (1 Punkt)} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1 \text{ (1 Punkt)}$$

b) partielle Integration mit $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x} dx \text{ (1 Punkt)} = \lim_{b \rightarrow \infty} -x e^{-x} \Big|_0^b - \int_0^b -e^{-x} dx \text{ (1 Punkt)} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -x e^{-x} - e^{-x} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -(x+1) e^{-x} \Big|_0^b \text{ (1 Punkt)} = \lim_{b \rightarrow \infty} -(b+1) e^{-b} + 1 \\ &= 1 - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b+1}{e^b} \text{ (1 Punkt)} \stackrel{\text{L'H}}{=} 1 - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^b} = 1 \text{ (1 Punkt)} \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 4 (Februar WiSe 2007/2008, RT A5)

(10 Punkte)

a) Mit Hilfe der Substitution $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ erhalten wir

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \sin t \cos t dt.$$

Erste Variante:

$$\int 2 \sin t \cos t dt = \int \sin(2t) dt = -\frac{1}{2} \cos(2t) + c = -\frac{1}{2} \cos(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R}$$

Zweite Variante:

$$\int 2 \sin t \cos t dt = 2 \int \sin t \cdot \sin' t dt = \sin^2 t + c = \sin^2(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R}$$

Dritte Variante:

$$\begin{aligned} \int 2 \sin t \cos t dt &= 2 \sin^2 t - \int 2 \sin t \cos z dt \\ \Rightarrow \int 2 \sin t \cos t dt &= \sin^2 t + c = \sin^2(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) i) Mittels

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - 2x e^x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx = -e + 2(e-1) = e-2.$$

ii) Es gilt:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} x^{-2} \Big|_1^a = \frac{1}{2}.$$

Lösung zur Aufgabe 5

(April WiSe 2007/2008, RT A4)

(10 Punkte)

- a) $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ (1 Punkt) $= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} \Rightarrow A = -1, B = 2, C = 0.$ (2 Punkte)
 $\Rightarrow \int_1^2 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx = \int_1^2 -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} dx = -\ln(x) + \ln(x^2+1) \Big|_1^2$ (2 Punkte) $= -\ln(2) + \ln(5) - \ln(2) = \ln\left(\frac{5}{4}\right).$ (1 Punkt)
- b) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln^2(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$ (2 Punkte) $\Rightarrow \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2(x) \Big|_1^e$ (1 Punkt) $= \frac{1}{2}$ (1 Punkt).

Lösung zur Aufgabe 6

(Juli SoSe 2008, VT A4)

(8 Punkte)

- (a) Da f nach Voraussetzung stetig ist, hat f eine Stammfunktion.
- (b) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt für jede Stammfunktion F von f

$$F(x) - F(-x) = \int_{-x}^x f(t) dt = 0$$

nach Voraussetzung. Umgestellt ergibt dies

$$F(x) = F(-x)$$

und damit die Behauptung.

- (c) Nach Definition des uneigentlichen Integrals gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$

und beide Grenzwerte müssen existieren, damit das uneigentliche Integral existiert. Das ist zum Beispiel für die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x$$

nicht erfüllt: Es gilt für beliebige $R > 0$

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-R}^R = 0$$

somit erfüllt f alle Voraussetzungen. Für das uneigentliche Integral erhalten wir aber

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} a^2 \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} b^2 \end{aligned}$$

Die beiden Grenzwerte $\lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} a^2 \right)$ und $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} b^2$ existieren offensichtlich nicht. Daher existiert auch das uneigentliche Integral nicht.

Block 6 - Wahr oder Falsch?

Lösung zur Aufgabe 1 (April WiSe 2007/2008, VT A2) (9 Punkte)

- a) Falsch: Gegenbeispiel: $f(x) = x^3, x_0 = 0$ (2 Punkte). Es gilt $f'(0) = f''(0) = 0$, aber $f'''(0) \neq 0$, also ist x_0 kein Extremum (Satz über lokale Extremwerte)(1 Punkt).
- b) Falsch: Gegenbeispiel: $f(x) = -x^2$ (2 Punkte). $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, also ist $x_0 = 0$ ein Maximum von f auf $] -1, 1[$ (Satz über lokale Extremwerte)(1 Punkt).
- c) Falsch: Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$ (2 Punkte). $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist (unbestimmt) divergent und beschränkt, da $|a_n| \leq 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$ (1 Punkt).

Lösung zur Aufgabe 2 (Juli SoSe 2008, VT A1) (6 Punkte)

- b), c) und f) sind wahr,
a), d) und e) sind falsch.

Lösung zur Aufgabe 3 (Oktober SoSe 2008, VT A6) (4 Punkte)

- a) falsch
b) richtig
c) richtig
d) richtig

Nicht notwendige Begründungen (zum Lernen):

- a) Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$.
- b) Begründung: Aus der Unbeschränktheit einer Folge folgt sofort die Nichtkonvergenz. Aus der Kontraposition folgt die Behauptung.
- c) Begründung: Die Gleichheit von Grenzwert und Funktionswert ist die Stetigkeitseigenschaft an der Stelle x_0 . Da eine in x_0 differenzierbare Funktion an dieser Stelle auch stetig ist, muss die Aussage wahr sein.
- d) Begründung: Diese Eigenschaft ist die "Monotonieeigenschaft" des bestimmten Integrals, die in der VL bewiesen wurde.

Lösung zur Aufgabe 4 (Dezember WiSe 2008/2009 (Probeklausur), VT A4) (4 Punkte)

- a) ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $f : x \mapsto e^{-x}$.
- b) ist wahr: f ist gerade $\Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'$ ist ungerade.
- c) ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist $(a_n) = (n)$ und $(b_n) = (-n)$.
- d) ist wahr (Beweis im Skript).

Lösung zur Aufgabe 5 (Februar WiSe 2008/2009, VT A4) (8 Punkte)

- a) Falsch: Gegenbeispiel: $f : x \mapsto \sin x$.
- b) Falsch: Gegenbeispiel: $(a_n) = (2n)$ und $(b_n) = (-n)$. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ aber $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$.
- c) Wahr: Die Funktion $f : x \mapsto \cos x - x$ ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ stetig und es gilt:

$$f(0) = 1 > 0 \text{ und } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ so dass $f(\xi) = 0$, d.h. $\cos \xi = \xi$.

Lösung zur Aufgabe 6 (April WiSe 2008/2009, VT A3) (9 Punkte)

- a) Wahr: f ist eine stetige Funktion definiert auf einem kompakten Intervall $[-1, 3]$ und besitzt daher ein globales Maximum.
- b) Falsch: Die Funktion f ist ein π -periodisches trigonometrisches Polynom und wird durch ihre trigonometrische Reihe exakt wiedergegeben. Aus dieser Darstellung lesen wir ab

$$\int_0^\pi f(x) \cos(2x) dx = \frac{1}{5} \neq 0$$

- c) Wahr: Ein Beispiel ist die ungerade Funktion $f : x \mapsto x$, für die gilt

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} a^2 = +\infty \text{ und } \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 x dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} b^2\right) = -\infty$$

daher existiert $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ nicht.

Lösung zur Aufgabe 7 (Juli SoSe 2009, VT A5)

(16 Punkte)

- a) Wahr. $h'(x) > 0$ auf $[a, b] \Rightarrow h$ **streng** monoton wachsend also injektiv auf $]a, b[$.
- b) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = |x - 1|$ ist nicht in $x - 1$ differenzierbar, hat dort jedoch ein globales Minimum.
- c) Falsch. Für $G(x) = F(x) + C$ mit $C \neq 0$ ist $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x)$ aber $F(x) \neq G(x)$.
- d) Wahr. Riemannsche Summe der Funktion $\sin(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$
- e) Falsch. $\int_{-a}^a x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^a = 0$. $\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 x dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c x dx$, falls diese existieren. Das ist ja aber nicht der Fall: $\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \Big|_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c^2}{2} - 0 \rightarrow \infty$.
- f) Falsch. Das Integral einer positiven Funktion muss positiv sein. (Alternativ: Wegen der Polstelle ist das Integral uneigentlich: $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \nearrow 0} \int_{-2}^b \frac{1}{x^2} dx + \lim_{c \searrow 0} \int_c^2 \frac{1}{x^2} dx$, falls diese Integrale existieren. Das ist nicht der Fall.
- g) Falsch. $\sum_{k=0}^{\infty} ((-1)^k - \cos(k\pi)) = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$ konvergiert gegen Null.
- h) Wahr. $\frac{3k-6k^2}{10k+7}$ divergiert gegen $-\infty$; d.h. $(\frac{3k-6k^2}{10k+7})$ ist keine Nullfolge.

Lösung zur Aufgabe 8 (Oktober SoSe 2009, VT A5)

(10 Punkte)

- a) Falsch. Es gilt für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ zu jedem x ein $y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$. Aber da bspw. für $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$ existiert, ist f nicht surjektiv.

- b) Richtig. Es gilt

$$\left(\sin(F(x)) \right)' = F'(x) \cdot \cos(F(x))$$

und somit

$$\int F'(x) \cos(F(x)) dx = \sin(F(x)) + c.$$

- c) Richtig. H mit $H(x) = \frac{x}{1+h^2(x)}$ ist ein Quotient aus stetigen Funktionen und der Nenner ist immer ungleich Null. Somit ist H für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig.
- d) Falsch. Betrachte bspw.

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

, so ist wegen

$$\lim_{x \searrow 0} G(x) = 1 \neq -1 = G(0)$$

G an der Stelle $x = 0$ nicht stetig. Aber $|G(x)| = 1$ und als konstante Funktion überall stetig.

e) Falsch. Betrachte bspw. $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$.

Lösung zur Aufgabe 9 (Oktober SoSe 2010, VT A2)

(10 Punkte)

a) (1 Punkt)

Richtig.

b) (2 Punkte)

Falsch. Beispiel $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

c) (2 Punkte)

Falsch. Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = n^2$.

d) (2 Punkte)

Falsch. Beispiel $a_n = (-1)^n$.

e) (1 Punkt)

Richtig.

f) (2 Punkte)

Falsch. $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^n$.

Lösung zur Aufgabe 10 (Februar WiSe 2010/2011, VT A3)

(10 Punkte)

a) richtig (1 Punkt)

b) falsch (1 Punkt)

Beispiel: $f(x) = x^2, g(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ (1 Punkt)

c) falsch (1 Punkt)

Beispiel: $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$. (1 Punkt)

d) falsch (1 Punkt)

Beispiel: $a_n = n^2, b_n = n$. (1 Punkt)

e) richtig (1 Punkt)

f) falsch (1 Punkt)

Beispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. (1 Punkt)

Lösung zur Aufgabe 11 (April WiSe 2010/2011, VT A3)

(13 Punkte)

a) i) falsch. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (2 Punkte)

ii) richtig (1 Punkt)

iii) falsch. $f(x) = |x|$ (2 Punkte)

iv) richtig (1 Punkt)

v) richtig (1 Punkt)

b) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat ein Polynom 7. Grades über \mathbb{C} genau 7 komplexe Nullstellen (1 Punkt). Komplexe Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten treten aber immer in komplex konjugierten Paaren auf (1 Punkt) und somit ist die Anzahl der echt komplexen Nullstellen eines Polynoms 7. Grades gerade (1 Punkt). Somit muss mindestens eine der Nullstellen reell sein. (1 Punkt)

Andere Möglichkeit: Man kann sich überlegen, dass, falls p ein Polynom 7. Grades ist, gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ (1 Punkt). Also existiert $a < 0$ mit $p(a) < 0$ und $b > 0$ mit $p(b) > 0$ (1 Punkt). Da p stetig ist (1 Punkt) kann man nun den Zwischenwertsatz anwenden, so dass die Existenz eines $\xi \in [a, b]$ mit $p(\xi) = 0$ folgt. (1 Punkt)

c) $p(x) = (x - i)^7$ (2 Punkte)