

[illegible]

1. Aufgabe (Single Choice)

(10 Punkte)

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: (☒ oder ☒). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus (☐).

(a) Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}.$$

Bestimmen Sie die Menge $\overset{\circ}{M}$ der inneren Punkte von M . Es ist

- ☒ $\overset{\circ}{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\};$
☐ $\overset{\circ}{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\};$
☐ $\overset{\circ}{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\};$
☐ $\overset{\circ}{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}.$

(b) Gegeben sei die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x^2, |x| \leq 4\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Die Menge M ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.
☐ Die Menge M ist beschränkt, aber nicht abgeschlossen.
☐ Die Menge M ist weder abgeschlossen noch beschränkt.
☒ Die Menge M ist abgeschlossen und beschränkt.

(c) Wir betrachten die Folge $(\vec{a}_n)_{n \geq 1}$ mit

$$\vec{a}_n = \begin{bmatrix} \frac{2 + n^2}{n + 3n^3} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{bmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Die Folge $(\vec{a}_n)_{n \geq 1}$ konvergiert.
☐ Die Folge $(\vec{a}_n)_{n \geq 1}$ divergiert, hat aber die konvergente Teilfolge $(\vec{a}_{2k})_{k \geq 1}$.
☒ Die Folge $(\vec{a}_n)_{n \geq 1}$ divergiert, hat aber die konvergente Teilfolge $(\vec{a}_{2k+1})_{k \geq 1}$.
☐ Die Folge $(\vec{a}_n)_{n \geq 1}$ divergiert und hat keine konvergenten Teilfolgen.

(d) Sei $\vec{v}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Was ist eine notwendige Bedingung, damit $\vec{v}$ ein Potential besitzt?

Notwendig für die Existenz des Potentials ist,

- ☐ $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.
☐ dass der Definitionsbereich konvex ist.
☐ dass der Definitionsbereich kompakt ist.
☒ dass die Ableitungsmatrix $\vec{v}'$ symmetrisch ist.

(e) Gegeben sei eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktionen

$$x \mapsto f(x, 0)$$

$$y \mapsto f(0, y)$$

sind jeweils stetig als Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Welche Aussage ist dann im Allgemeinen richtig?

- ☐ Die Funktion f ist im Punkt $(0, 0)$ stetig.
☒ Die Funktion f muss im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig sein.
☐ Die Funktion f ist im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar.
☐ Die Funktion f ist im Punkt $(0, 0)$ total differenzierbar.

- (f) Sei $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Was sagt der Satz von Stokes dann über eine geschlossene, glatte Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^3$ aus?

- ☐ Es gilt $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$ für alle $\vec{x} \in F$.
☐ Wenn $\vec{v}$ ein Potential besitzt, dann gilt $\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0$.
☐ Es gilt $\iint_F \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{O} = \pi$.
☒ Wenn $\vec{v}$ ein Vektorpotential besitzt, dann gilt $\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0$.

- (g) Sei $\vec{x}$ ein kritischer Punkt von $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$H_f(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dann befindet sich an der Stelle $\vec{x}$

- ☐ ein lokales Minimum.
☒ ein lokales Maximum.
☐ ein Sattelpunkt.
☐ eine Nullstelle.
- (h) Sei $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und mit $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$. Weiter seien $\vec{\gamma}_1: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\vec{\gamma}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ Kurven im $\mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{\gamma}_1(0) = \vec{\gamma}_2(0), \quad \vec{\gamma}_1(2) = \vec{\gamma}_2(1).$$

Dann gilt

- ☐ $\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$
☐ $\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2 \cdot \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$
☐ $\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$
☒ $\int_{\vec{\gamma}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$
- (i) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $f(0, 0) = a$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
- ☐ f ist stetig genau dann, wenn $a = 0$.
☒ Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig, und unstetig in $(0, 0)$.
☐ f ist stetig genau dann, wenn $a = 2$.
☐ f ist stetig differenzierbar genau dann, wenn $a = 1$, und in diesem Fall gilt $\text{grad}_{(0,0)} f = (0 \ 0)^\top$.
- (j) Für jede lineare Abbildung $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ gilt:
- ☐ $\vec{F}$ ist stetig genau dann, wenn A invertierbar ist.
☐ $\vec{F}$ ist differenzierbar genau dann, wenn A vollen Rang hat.
☒ $\vec{F}$ ist differenzierbar und die Ableitungsmatrix ist gleich A .
☐ $\vec{F}$ ist zweimal stetig differenzierbar und die Hesse-Matrix ist gleich A .

2. Aufgabe (Topologie und Folgen)

(1 Punkt)

Gegeben sei eine konvergente reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 4a_n \\ a_n^2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ b \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$.

$$b = \boxed{11}$$

3. Aufgabe (Stetigkeit)

(2 Punkte)

Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x + y - 2}{(2x - 2)^2 + 1}, & \text{für } x > 1, y \in \mathbb{R}, \\ \frac{(2x - 1)^2 - e^{1-x}}{1 + (y - 2)^2}, & \text{für } x \leq 1, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie den rechtsseitigen Grenzwert in Abhängigkeit von $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(1 + h, y) = a.$$

$$a = \boxed{y}$$

Bestimmen Sie ein $b \in \mathbb{R}$, so dass f stetig im Punkt $(1, b)$ ist.

Es gilt

$$b = \boxed{0}$$

4. Aufgabe (Differenzierbarkeit)

(5 Punkte)

(a) Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad}_{(x,y)} f = \begin{bmatrix} 2y^2 + 2e^x \\ 4xy - 4y \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0, 3)$

$$H_f(0, 3) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

$$a = \boxed{2}, \quad b = \boxed{12}, \quad c = \boxed{-4}.$$

(b) Gegeben sei die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y) = \sin(2x + 2) - 2xy + \frac{1}{2}y^2 + 3.$$

Sei $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ die Richtung des stärksten Anstiegs von g im Punkt $(-1, 2)$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a = \frac{1}{\sqrt{20}} \cdot \boxed{-2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{20}} \cdot \boxed{4}.$$

5. Aufgabe (Taylor, Fehlerschranken, Koordinatensysteme) (7 Punkte)

(a) Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(1, 2) = 6, \quad \text{grad}_{(1,2)} f = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_f(1, 2) = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_2(f)$ von f im Entwicklungspunkt $(1, 2)$ kann in der Form

$$T_2(f)(x, y) = 6 + a(x - 1) + (y - 2) + b(x - 1)(y - 2) + c(x - 1)^2 + d(y - 2)^2$$

dargestellt werden. Bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$a = \boxed{3}, \quad b = \boxed{-2}, \quad c = \boxed{-3}, \quad d = \boxed{4}.$$

(b) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{p}) \right| \leq 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p}) \right| \leq 3$$

für alle $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine möglichst kleine obere Schranke für $a \in \mathbb{R}$, die sich mithilfe des Fehlerschranksatzes ergibt, sodass gilt

$$|f(-2, -1) - f(5, -2)| \leq a.$$

$$a = \boxed{10}$$

(c) Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe K mit Radius 2 um $(0, 0)$, sowie ein Dreieck D mit den Eckpunkten $(-2, 2)$, $(2, 2)$ und $(0, 0)$. Dann lässt sich die Schnittfläche der beiden Objekte in Polarkoordinaten schreiben als

$$K \cap D = \{(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \in [0, 2], \varphi \in [a, b]\}.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a = \boxed{\frac{\pi}{4}}, \quad b = \boxed{\frac{3\pi}{4}}.$$

6. Aufgabe (Extrema)

(5 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

- (a) f hat genau einen kritischen Punkt. Die Hesse-Matrix ausgewertet im kritischen Punkt ist von der Form

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie a, b, c .

$$a = \boxed{2}, \quad b = \boxed{0}, \quad c = \boxed{2}.$$

- (b) Wir optimieren nun f unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

f hat unter dieser Nebenbedingung das Maximum

$$M = 1 = f(x_0, y_0),$$

für geeignetes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sowie das Minimum m . Bestimmen Sie m und x_0 .

$$m = \boxed{\frac{1}{3}}, \quad x_0 = \boxed{0}.$$

7. Aufgabe (Potentiale)

(7 Punkte)

Wir betrachten die Vektorfelder

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} \frac{-2x}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{-2y}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{-2z}{x^2 + y^2 + z^2} \end{bmatrix}$$

und

$$\vec{G}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} 2xy + 7z^2 + \ln((z^2 + 1)^y) \\ 39 + 2xy + 2yz \\ e^{5xyz} + 2xy \end{bmatrix}.$$

- (a) $\vec{F}$ hat ein Potential $V: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $V(1, 0, 0) = 0$. Geben Sie dieses an.

$$V(x, y, z) = \ln \left(\boxed{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

- (b) Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{G}$ von $\vec{G}$.

$$\operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{G} = \boxed{2} \cdot (x + y + z) + \boxed{5} \cdot xy e^{5xyz}.$$

(c) Berechnen Sie die erste Komponente der Rotation von $\vec{G}$. Es gilt

$$\operatorname{rot}_{(x,y,z)} \vec{G} = \begin{bmatrix} axz e^{5xyz} + bx + cy + dz \\ R_2(x, y, z) \\ R_3(x, y, z) \end{bmatrix},$$

für Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und Skalarfelder R_2 und R_3 . Bestimmen Sie a, b, c und d :

$$a = \boxed{5}, \quad b = \boxed{2}, \quad c = \boxed{-2}, \quad d = \boxed{0}.$$

8. Aufgabe (Kurven- und Oberflächenintegrale) (9 Punkte)

(a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{v}(x, y) = \begin{bmatrix} -3y \\ 4xy + x^2 \end{bmatrix}$$

und die Kurve $\vec{\gamma}$ mit Parametrisierung

$$\vec{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ -t^2 \end{bmatrix}.$$

Der Ansatz zur Berechnung des vektoriellen Kurvenintegrals führt auf das Integral

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt) dt$$

mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie A, B, C und D .

$$A = \boxed{16}, \quad B = \boxed{-8}, \quad C = \boxed{6}, \quad D = \boxed{0}.$$

(b) Eine Parametrisierung der Mantelfläche M eines elliptischen Kegels ist gegeben durch

$$\vec{\eta}: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\eta}(\varphi, z) = \begin{bmatrix} z \cos(\varphi) \\ 2z \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix}.$$

Der Ansatz zur Berechnung des Flächeninhalts führt auf das Integral

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{z^r (a \cos^p(\varphi) + \sin^q(\varphi) + b)} dz d\varphi$$

mit Konstanten $a, b, r, p, q \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a, b, c, p, q .

$$a = \boxed{4}, \quad b = \boxed{4}, \quad r = \boxed{2},$$

$$p = \boxed{2}, \quad q = \boxed{2}.$$

9. Aufgabe (Mehrdimensionale Integration)

(8 Punkte)

(a) Seien

$$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto \begin{bmatrix} u^2 \\ v \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Q = [0, 3] \times [0, 3].$$

Wir fassen $\vec{f}$ als Koordinatentransformation auf. Der Flächeninhalt A von $\vec{f}(Q)$ ist gegeben durch

$$A = \iint_{\vec{f}(Q)} 1 \, dx \, dy = \iint_Q (ku + mv) \, du \, dv$$

für Konstanten $k, m \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie k, m .

$$k = \boxed{2}, \quad m = \boxed{0}.$$

(b) Seien $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Stellen Sie die Grenzen für die Integration über den Bereich G für die beiden möglichen Reihenfolgen der Variablen auf (Normalbereiche vom Typ I und II), in dem Sie geeignete Ausdrücke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in x und y angeben, sodass gilt:

$$\iint_G g(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_\alpha^\beta g(x, y) \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_\gamma^\delta g(x, y) \, dy \right) dx.$$

$$\alpha = \boxed{0}, \quad \beta = \boxed{y}, \quad \gamma = \boxed{x}, \quad \delta = \boxed{1}.$$

(c) Wir betrachten den Körper, der entsteht, indem man aus der Einheitskugel einen Zylinder mit Radius $\varepsilon \in]0, 1[$ entfernt:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\}.$$

Dann gilt durch Übergang zu Zylinderkoordinaten bei der Koordinatentransformation:

$$\iiint_K \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy \, dz = \int_{-\sqrt{1-\varepsilon^2}}^{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_\varepsilon^A \rho^B \, d\rho \right) d\varphi \right) dz.$$

Bestimmen Sie A und B .

$$A = \boxed{\sqrt{1-z^2}}, \quad B = \boxed{0}.$$

10. Aufgabe (Integralsätze)

(6 Punkte)

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Kegel mit Grundfläche G und Mantel M . Für den Rand von K gilt also

$$\partial K = G \cup M.$$

Im Folgenden sei ∂K so parametrisiert, dass das Oberflächenelement nach außen zeigt.

Sei

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} ey^2 + x^4 \\ -6x^3y + z \sin(y) \\ 3x^2z + z^2 \cos(y) \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $A, B, C, D, E, s \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} & \iint_M \vec{v} \cdot d\vec{O} + s \cdot \iint_G \vec{v} \cdot d\vec{O} \\ &= \iiint_K (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dz \sin(y) + Ez \cos(y)) dx dy dz \end{aligned}$$

ist.

$$\begin{aligned} A &= \boxed{0}, & B &= \boxed{-2}, & C &= \boxed{3}, & D &= \boxed{0}, \\ E &= \boxed{3}, & s &= \boxed{1}. \end{aligned}$$