

[illegible]

1. Aufgabe (Single Choice)

(10 Punkte)

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: (☐ oder ☒). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus (☐).

(a) Wir betrachten drei Folgen

$$(a_n)_{n \geq 1} = ((1 + \cos(\pi n)) e^n)_{n \geq 1}, \quad (b_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{n} \sin(\pi n) \right)_{n \geq 1},$$

$$(c_n)_{n \geq 1} = ((-1)^n 2n^3)_{n \geq 1}.$$

Welche der folgenden Vektorfolgen konvergiert?

- ☐ $(a_n, b_n)_{n \geq 1}$
- ☐ $(b_n, b_{n+1})_{n \geq 1}$
- ☐ $(b_n, c_n)_{n \geq 1}$
- ☐ $(c_{2n}, c_{2n})_{n \geq 1}$

(b) Gegeben sei die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y < |\sin(x)|\}$. Welche Aussage ist wahr?

- ☐ Die Menge M ist offen.
- ☐ Die Menge M ist weder offen noch abgeschlossen.
- ☐ Die Menge M ist offen und abgeschlossen.
- ☐ Die Menge M ist abgeschlossen.

(c) Seien $\vec{v}, \vec{w}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder und $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld. Ferner sei $\vec{v}$ quelfrei.

Welches der folgenden Vektorfelder hat immer ein Vektorpotential?

- ☐ $\vec{v} + \vec{w}$
- ☐ $\vec{v} + \text{rot } \vec{w}$
- ☐ $\vec{v} + \text{grad } f$
- ☐ $f\vec{v}$

(d) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ist

- ☐ positiv definit.
- ☐ negativ definit.
- ☐ indefinit.
- ☐ Keine der vorangegangenen Möglichkeiten

(e) Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine total differenzierbare Abbildung. Welche Aussage gilt dann **nicht** in jedem Fall?

- ☐ Die Abbildung $\vec{f}$ ist stetig.
- ☐ Alle Richtungsableitungen von $\vec{f}$ existieren.
- ☐ Alle partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ sind stetig.
- ☐ Alle partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ existieren.

(f) Sei $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Welcher der folgenden Ausdrücke ist erklärt?

- ☐ $\operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{v})$
- ☐ $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v})$
- ☐ $\operatorname{grad}(\operatorname{rot} \vec{v})$
- ☐ $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{v})$

(g) Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x^2z + \sin(x^2) \\ e^{3y} + \ln(y) \\ 2x^3 + \frac{1}{z^8+4} \end{bmatrix},$$

wobei $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$ sei. Besitzt das Vektorfeld $\vec{F}$ ein Potential?

- ☐ Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat ein globales Potential auf D .
- ☐ Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat kein globales Potential auf D , da $\operatorname{rot}_{(x,y,z)} \vec{F} \neq \vec{0}$ für mindestens ein $(x, y, z) \in D$.
- ☐ Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat nicht unbedingt ein globales Potential auf D , da D nicht konvex ist.
- ☐ Das Vektorfeld $\vec{F}$ hat kein globales Potential auf D , da $\operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{F} \neq 0$ für mindestens ein $(x, y, z) \in D$.

(h) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $f(0, 0) = a$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- ☐ f ist stetig genau dann, wenn $a = 0$.
- ☐ Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig, und unstetig in $(0, 0)$.
- ☐ f ist stetig genau dann, wenn $a = 2$.
- ☐ f ist stetig differenzierbar genau dann, wenn $a = 1$, und in diesem Fall gilt $\operatorname{grad}_{(0,0)} f = [0 \ 0]^\top$.

(i) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \sin(x^2 + 7)y - (5 - \pi z)^2$. Dann gilt:

- ☐ $\operatorname{grad} f = \vec{0}$.
- ☐ $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{bmatrix} 2x \cos(x^2 + 7) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \pi$.

☐ Es gibt ein Vektorfeld $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $\vec{F} = \operatorname{grad} f$.

(j) Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine symmetrische Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\vec{p}) = \vec{p}^\top \cdot A \cdot \vec{p}$, wobei $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ als Spaltenvektor aufgefasst wird. Dann gilt:

- ☐ Es gibt $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{p}_1) < 0 < f(\vec{p}_2)$.
- ☐ Es gibt kein $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ mit $f(\vec{p}) = 1$.
- ☐ Für alle $\vec{p} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ gilt $f(\vec{p}) > 0$.
- ☐ f ist bijektiv.

2. Aufgabe (Topologie und Folgen)

(1 Punkt)

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 4 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \frac{1}{\ln(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$.

$$b = \boxed{}$$

3. Aufgabe (Stetigkeit)

(2 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{f}(x, y) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 4x^2y^2 \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\ 5 \sin(y^3) + 3e^{5x} \end{bmatrix}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

Dann ist

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}.$$

4. Aufgabe (Differenzierbarkeit)

(5 Punkte)

(a) Wir betrachten eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = 6x + 3 \sin(x - 1) - 4xy + y^2.$$

Berechnen Sie die den Gradienten $\text{grad}_{(1,-1)} f = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}.$$

Sei $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ die Richtung des stärksten Anstiegs von g im Punkt $(1, 2)$. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$.

$$c = \boxed{}.$$

- (b) Wir betrachten eine differenzierbare Abbildung $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}(x, y) = \begin{bmatrix} 9x^2 & 0 \\ 0 & 2e^{y-2} \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(1, 2) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ in Richtung des Vektors

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \boxed{}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \boxed{}.$$

5. Aufgabe (Taylor, Fehlerschranken, Koordinatensysteme) (7 Punkte)

- (a) Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(2, -1) = -5, \quad \text{grad}_{(2, -1)} f = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Das Taylorpolynom 1. Ordnung $T_1(f)$ von f im Entwicklungspunkt $(2, -1)$ kann in der Form

$$T_1(f)(x, y) = ax + by + c$$

dargestellt werden. Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$

- (b) Gegeben seien die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 5\}$ und eine differenzierbare Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit Gradienten

$$\text{grad}_{\vec{x}} f = \begin{bmatrix} 2x^2 \\ 3y \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die kleinsten oberen Schranken $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{p}) \right| \leq a$ und

$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p}) \right| \leq b$ für alle $\vec{p} \in M$ gilt.

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}.$$

- (c) Die Menge

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$$

lässt sich in Kugelkoordinaten durch

$$K = \left\{ (r \cos(\varphi) \sin(\theta), r \sin(\varphi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in [0, 1], \theta \in [a, b], \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, c \right] \right\}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ schreiben. Bestimmen Sie b und c .

$$b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$

6. Aufgabe (Extrema)

(8 Punkte)

- (a) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x - y - 2$. f hat genau einen kritischen Punkt (x_0, y_0) , und die Hesse-Matrix von f in diesem Punkt hat die Form

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$x_0 = \boxed{}, \quad y_0 = \boxed{},$$

$$h_{11} = \boxed{}, \quad h_{12} = h_{21} = \boxed{}, \quad h_{22} = \boxed{}.$$

- (b) Maximieren Sie $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$ unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

d.h. bestimmen Sie

$$M = \max\{h(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2: g(x, y) = 0\}$$

sowie das in diesem Fall eindeutige $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x_1, y_1) = 0$, sodass

$$M = h(x_1, y_1)$$

gilt.

$$M = \boxed{}, \quad x_1 = \boxed{}, \quad y_1 = \boxed{}.$$

7. Aufgabe (Potentiale)

(3 Punkte)

Für welche Werte von $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat das Vektorfeld

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} (a^2 + b)x^2 + (c + 2)y \\ (a + 1)y^3 + (2a + b)z \\ (c^2 + b)x - (a - 2)bz \end{bmatrix}$$

ein Potential?

$$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$

9. Aufgabe (Mehrdimensionale Integration)

(11 Punkte)

(a) Seien

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v, w) \mapsto \begin{bmatrix} u + w \\ 2w \\ v^2 \end{bmatrix}$$

und $Q = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ ein Quader mit Seitenlängen $a, b, c > 0$. Wir fassen $\vec{f}$ als Koordinatentransformation auf. Der Flächeninhalt A von $\vec{f}(Q)$ ist gegeben durch

$$A = \iiint_{\vec{f}(Q)} 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_Q (ku + mv + nw) \, du \, dv \, dw$$

für Konstanten $k, m, n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie k, m, n .

$$k = \boxed{}, \quad m = \boxed{}, \quad n = \boxed{}.$$

(b) Seien $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Stellen Sie die Grenzen für die Integration über den Bereich G für die beiden möglichen Reihenfolgen der Variablen auf (Normalbereiche vom Typ I und II), indem Sie geeignete Ausdrücke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in x und y angeben, sodass gilt:

$$\iint_G g(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_\alpha^\beta g(x, y) \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_\gamma^\delta g(x, y) \, dy \right) dx.$$

$$\alpha = \boxed{}, \quad \beta = \boxed{}, \quad \gamma = \boxed{}, \quad \delta = \boxed{}.$$

(c) Sei $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ ein Zylinderabschnitt im reellen Koordinatenraum $\mathbb{R}^3$. Durch Übergang zu Zylinderkoordinaten bei der Koordinatentransformation erhalten wir für geeignete Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ mit $B \geq 0$:

$$\iiint_Z (x + y)^2 \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^A z^B (1 + 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \, d\rho \right) d\varphi \right) dz$$

Berechnen Sie die Zahlen A, B :

$$A = \boxed{}, \quad B = \boxed{}.$$

(d) Es bezeichne P das Parallelogramm mit Ecken $(0, 0), (2, -1), (2, 2), (0, 3)$. Durch die Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

wird das Einheitsquadrat auf das Parallelogramm P abgebildet. Damit gilt für das Integral

$$\iint_P (2x^2 + 4y^3) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \left(2(x(u, v))^2 + 4(y(u, v))^3 \right) \cdot a \, du \, dv,$$

für $a \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$y(u, v) = \boxed{}, \quad a = \boxed{}.$$

10. Aufgabe (Integralsätze)

(6 Punkte)

- (a) Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit beliebigem Mittelpunkt $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ und beliebigem Radius $R > 0$. Im Folgenden sei ∂K so parametrisiert, dass das Oberflächenelement nach außen zeigt. Sei

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} xyz + x^2 \\ -3y^2z \\ z - 3xz \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint_K (Ax + Byz + 1) dx dy dz$$

für Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie A und B .

$$A = \boxed{}, \quad B = \boxed{}.$$

- (b) Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} (x-1)y \\ 4z(x-1) \\ 2y + z^4 \end{bmatrix}.$$

Die Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ im Raum sei eine Einheitskreisscheibe in der x - y -Ebene, parametrisiert durch die Abbildung

$$\vec{x}: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow S, (r, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der Rand ∂S von S sei durch $\vec{\gamma}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ parametrisiert.

Das Oberflächenelement der Parametrisierung von S ist gegeben durch

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r}(r, \varphi) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(r, \varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa \\ r \end{bmatrix},$$

für eine Konstante $\kappa \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = a \cdot \iint_S \begin{bmatrix} 6-4x \\ 0 \\ 4z-x+b \end{bmatrix} \cdot d\vec{O} = abc$$

für Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $|a| = 1$ und $b > 0$.

Berechnen Sie κ, a, b, c :

$$\kappa = \boxed{}, \quad a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}.$$