

Oktober-Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen (Verständnisteil)

1. Aufgabe

7 Punkte

Aus $\left| \frac{x^2 \sin x}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 \sin x}{x^2} \right| = |\sin x|$ folgt $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$,
d.h. f ist in $(0,0)$ stetig.

In $(0,0)$ existieren die beiden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h - 0}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

2. Aufgabe

5 Punkte

Es ist $\text{grad}_{(x,y)} f = (\cos x, -\sin y)^T$ und $\text{grad}_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})} f = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

In der gesuchten Richtung $\vec{u} = (1, p)^T$

soll der Anstieg gleich 1 sein, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \text{grad}_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})} f \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{p}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1+p^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow (p+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = -1$$

Ergebnis: Der Anstieg ist gleich 1 in der Richtung $(1, -1)^T$.

3. Aufgabe

6 Punkte

Es ist $\vec{h}(0,0) = (0, \pi)^T$ und $\vec{h}'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$

Mit der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} f'(0,0) &= g'(\vec{h}(0,0)) \cdot \vec{h}'(0,0) \\ &= g'(0, \pi) \cdot \vec{h}'(0,0) \\ &= (\pi, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi - 1, \pi) \end{aligned}$$

D.h. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \pi - 1$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \pi$.

4. Aufgabe

4 Punkte

\vec{v} ist ein Potentialfeld, eine Stammfunktion ist $f(x,y,z) = xy - zy$

Folglich

$$\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(0,1,2) - f(1,0,1) = -2 - 0 = -2.$$

5. Aufgabe

8 Punkte

Eine Parametrisierung von $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$ ist $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, 1)^T$ $t \in [0, 2\pi]$

Es ist $\vec{v} = \text{rot } \vec{w}$, mit dem Satz von Stokes erhält man

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iint_S \text{rot } \vec{w} \cdot d\vec{O} = \int_{\partial S} \vec{w} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

6. Aufgabe

4 Punkte

Eine Parametrisierung ist

$$\vec{x}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 1 - r \end{pmatrix} \quad r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

7. Aufgabe

6 Punkte

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{-\frac{x}{y}} dx dy &= \int_0^2 -ye^{-\frac{x}{y}} \Big|_{x=0}^{\frac{y}{2}} dy = \int_0^2 (-ye^{-\frac{1}{2}} + y) dy \\ &= \left[-\frac{y^2}{2} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$