TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Fakultät II - Mathematik 07.10.2010
Dozenten: Bärwolff/Böse/Kato/Penn-Karras
Assistenten: Böse, Neitzel

Lösungsskizzen Oktober-Klausur Verständnisteil SS 2010
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

A; nicht konvex, nicht offen, nicht abgeschlossen, nicht beschränkt
B: nicht konvex, nicht offen, abgeschlossen, nicht beschränkt
C: nicht konvex, offen, nicht abgeschlossen, nicht beschränkt
D: konvex, nicht offen, nicht abgeschlossen, beschränkt

2. Aufgabe (11 Punkte)

a) **Stetigkeit:**
f ist in $(0,0)$ nicht stetig, denn es gilt z.B. $(0,1/k) \to (0,0)$, aber $f(0,1/k) = 0 \not\to 1 = f(0,0)$ für $k \to \infty$.
partielle Differenzierbarkeit:
Die Funktion $h(x) := f(x,\, 0)$ ist konstant, $h(x) = 1$
Folglich: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\, 0) = h'(0) = 0$.
Die Funktion $j(y) := f(0,\, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \neq 0 \\ 1 & \text{für } y = 0 \end{cases}$
ist in $y = 0$ nicht stetig, also auch nicht differenzierbar,
d.h. die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(0,\, 0)$ existiert nicht.

Alternativ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ existiert nicht, da } \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-1}{\Delta y} \text{ existiert nicht}$$

b) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist g stetig als Komposition stetiger Funktionen

i) g ist stetig in $(0,0)$, denn für $(x_k, y_k) \to (0,0)$ für $k \to \infty$ $((x_k, y_k) \neq (0,0))$ gilt

$$|g(x_k, y_k)| \leq \frac{|x_k|^a}{x_k^2} = |x_k|^{a-2} \to 0 \text{ für } k \to \infty, \text{ da } a - 2 > 0$$

ii) g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn z.B. gilt $(1/k, 0) \to (0,0)$ aber $g(1/k, 0) = k^{2-a} \to \infty$ für $k \to \infty$, da $2 - a > 0$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Die angegebenen Vektorfelder sind einfache Beispiele. Es gibt viele andere.

a) $\vec{v}_1 = (0, x, 0)^T$, da rot $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ (nachrechnen!) und somit notwendige Potentialbedingung nicht erfüllt.

b) $\vec{v}_2 = (0,0,0)^T$, da div rot $\vec{v} = 0$ für alle Vektorfelder $\vec{v}$ mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen gilt.(Alternativ: Nachrechnen)

c) $\vec{v}_3 = (|x|, 1, 1)$. $\vec{v}_3$ ist stetig, da alle Komponenten stetig sind, aber nicht differenzierbar, da $\partial\vec{v}_3/\partial x$ nicht existiert.

d) $\vec{v}_4 = (1,1,1)^T$, da $-\nabla(-x - y - z) = (1,1,1)^T$

4. Aufgabe

(7 Punkte)

Die Einheitskugel K ist kompakt, ∂K ist regulär (mit nach außen weisender Normale und die Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w}$ haben stetige partielle Ableitungen.) Nach zweimaliger Anwendung des Satzes von Gauss gilt

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint_K \text{div } \vec{v} dxdydz$$

und

$$\iint_S \vec{w} \cdot d\vec{O} = \iiint_K \text{div } \vec{w} dxdydz.$$

Mit

$$\text{div } \vec{v} = 3 = \text{div } \vec{w}$$

gilt also:

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iint_S \vec{w} \cdot d\vec{O}.$$

5. Aufgabe

(6 Punkte)

Eine Parametrisierung ist

$$\vec{x}(r, \phi) = (r \cos \phi,\, r \sin \phi,\, r^3)^T, \quad r \in [0,1], \quad \phi \in [0, 2\pi]$$