Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 14/15

G. Bärwolff, A. Gündel-vom-Hofe 20.02.2015

Februar – Klausur
Analysis II B für Ingenieurswissenschaften

Nachname: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4-Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. **Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben.** Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	Σ

1. Aufgabe
6 Punkte

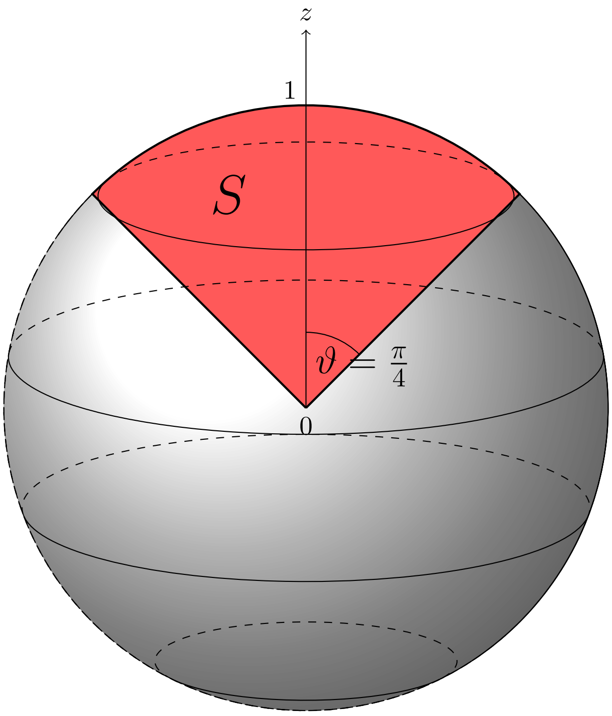
Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades Tf der Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$

mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$. Skizzieren Sie die Niveaulinien des Taylorpolynoms Tf zu den Werten $0, \frac{1}{4}, 1$.

2. Aufgabe
7 Punkte

Es sei $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ die Einheitskugel. Aus dieser wird der in der Skizze gekennzeichnete Kugelsektor S ausgeschnitten.



(a) Berechnen Sie das Volumen des Kugelsektors S.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint\limits_S 8z \; dxdydz.$$

3. Aufgabe

6 Punkte

In der folgenden Tabelle sind verschiedene Mengen gegeben. Kennzeichnen Sie jeweils, ob die angegebene Eigenschaft zutrifft (mit +) oder nicht zutrifft (mit -). Es soll in jedes Feld ein Zeichen geschrieben werden.

Menge	offen	beschränkt	kompakt
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + 3y < 1\}$			
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \in [0,1]\}$			
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-42)^2 \leq 17, x < 0\}$			

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{v}_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 5\lambda y + 3yz \\ 5x + 3\lambda xz - 2 \\ 2xy + \lambda xy - 4z \end{pmatrix},$$

in Abhängigkeit von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Für welchen Wert λ^* besitzt das Vektorfeld $\vec{v}_\lambda$ ein Potential $u(x,y,z)$? Bestimmen Sie für dieses spezielle λ^* ein Potential $u(x,y,z)$.

(b) Besitzt $\vec{v}_\lambda$ ein Vektorpotential?

(c) Es sei S die Strecke, die vom Punkt $(1,1,1)$ zum Punkt $(1,0,1)$ führt. Berechnen Sie für den in (a) berechneten Wert λ^* das Kurvenintegral

$$\int_S \vec{v}_{\lambda^*} \, \vec{ds}.$$

Hinweis: Sollten Sie in (a) keine Lösung gefunden haben, berechnen Sie dieses Integral für ein allgemeines $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Aufgabe

12 Punkte

Es sei die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := 4(x-y) - x^2 - y^2, \quad D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

Besitzt die Funktion f globale Extremwerte? Wenn ja, bestimmen Sie alle globalen Extrempunkte der Funktion f in der Menge D.

(Hinweis: Es gilt $\frac{24}{\sqrt{2}} - \frac{18}{2} < 8$.)

6. Aufgabe

12 Punkte

Seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(xy)^2}{x^2+y^2} + x^2, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} + x^2 \sin(y), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie die Stetigkeit der Funktionen f, g in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion g in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen sie existieren.

(c) Begründen Sie, dass nicht alle partiellen Ableitungen von g in $(0,0)$ stetig sind.

7. Aufgabe

8 Punkte

Begründen Sie folgende Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel

(a) Es existiert genau eine Abbildung $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, für die gilt

$$\vec{w}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es seien $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Ist $\vec{w}_1$ ein Vektorpotential zu $\vec{v}$, dann ist auch $\vec{w}_2 = \vec{w}_1 + \operatorname{grad} f$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$.

(c) Sei $\vec{v}$ ein differenzierbares Vektorfeld mit Potential u, dann ist u ebenso differenzierbar.

(d) Es sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Hat f in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum, dann gilt für die Hessematrix $\det(f''(\vec{x}_0)) > 0$.