

**Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure**

Nachname: Vorname:
Matr.-Nr.: Studiengang:

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 + y^2 - y.$$

- (i) Geben Sie bei folgenden Ausdrücken an, ob diese erklärt sind, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\text{grad } f, \quad \text{div } f, \quad \text{Hess } f, \quad \Delta f.$$

Hinweis: Hess f bezeichnet die Hessematrix von f .

- (ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion f .
(iii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in dem Entwicklungspunkt $(1, 0)$.

2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die beiden Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 2\},$$

sowie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2xy.$$

- (i) Skizzieren Sie die Mengen A und B .
(ii) Integrieren Sie die Funktion f über die Mengen A und B .

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Kurven

$$\vec{c}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}_1(t) = (t, t^2, t^3)^T,$$

$$\vec{c}_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}_2(t) = (t, t, t)^T,$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ (x^3 - z)(z - y) \\ (x^2 - y)(y - x) \end{pmatrix}.$$

- (i) Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_{\vec{c}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ und $\int_{\vec{c}_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$.
(ii) Besitzt \vec{v} ein Potential?

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben seien der Körper $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x(\sin(y) + 1) - e^z \\ 3xyz^2 + \cos(y) \\ \sin(y) - xz^3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Parametrisieren Sie die gesamte Oberfläche ∂K des Körpers.
- (ii) Berechnen Sie das Volumen von K durch Integration.
- (iii) Bestimmen Sie den Wert des Flussintegrals $\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\},$$

sowie die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x + y^2.$$

Begründen Sie, dass f auf D ein Minimum und ein Maximum annimmt und ermitteln Sie alle globalen Extremstellen.

6. Aufgabe

12 Punkte

- (i) Geben Sie zu folgenden Teilaufgaben jeweils ein Beispiel an. Dabei müssen Sie Ihre Wahl nicht begründen.
 - (a) Eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^3$, welche nicht kompakt ist.
 - (b) Eine offene nichtleere Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ und eine stetige Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, welche auf B weder ihr Minimum, noch ihr Maximum annimmt.
- (ii) Begründen Sie folgende Aussagen oder widerlegen Sie diese.
 - (c) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = 5x^2y - e^{yz}.$$

Die Richtungsableitung von f im Punkt $(1, 2, 0)$ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{17}}(1, -4, 0)^T$ ist null.

- (d) Die Funktion $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ und

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{\sin(x^2+y^2)}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Nullpunkt partiell nach y differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 1.$$