

**Juli – Klausur**  
**Analysis II B für Ingenieure**  
**Lösungsskizze**

---

**1. Aufgabe**

8 Punkte

Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 + y^2 - y.$$

- (i) Geben Sie bei folgenden Ausdrücken an, ob diese erklärt sind, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

$$\text{grad } f, \quad \text{div } f, \quad \text{Hess } f, \quad \Delta f.$$

*Hinweis:* Hess  $f$  bezeichnet die Hessematrix von  $f$ .

- (ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion  $f$ .  
(iii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von  $f$  in dem Entwicklungspunkt  $(1, 0)$ .
- 

- (i) **(2 Punkte)**

Es sind  $\text{grad } f$ ,  $\text{Hess } f$  und  $\Delta f$  erklärt. Nicht erklärt ist  $\text{div } f$ , da  $f$  kein Vektorfeld ist. Wir erhalten

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ -2x + y^2 + 2y - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2y + 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta f(x, y) = 4 + 2y.$$

- (ii) **(4 Punkte)** Zunächst bestimmen wir alle kritischen Punkte von  $f$ , da nur in diesen lokale Extremstellen bzw. Sattelpunkte vorliegen können. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ -2x + y^2 + 2y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir unmittelbar

$$x = y.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung folgt

$$y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1.$$

Die kritischen Punkte von  $f$  sind also

$$\vec{x}_1 = (1, 1), \quad \vec{x}_2 = (-1, -1).$$

Nun untersuchen wir die Hessematrix von  $f$  in den kritischen Punkten auf Definitheit. Wir erhalten

$$\text{Hess } f(\vec{x}_1) = \text{Hess } f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da der Eintrag oben links (nämlich 2) dieser Matrix positiv ist folgt mit

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$$

die positive Definitheit, also hat  $f$  in  $\vec{x}_1$  ein lokales Minimum. Im kritischen Punkt  $\vec{x}_2$  liegt wegen

$$\det(\text{Hess } f(\vec{x}_2)) = \det(\text{Hess } f(-1, -1)) = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

ein Sattelpunkt vor.

- (iii) **(2 Punkte)** Das Taylorpolynom  $Tf_{(1,0)}$  zweiter Ordnung von  $f$  im Entwicklungspunkt  $(1, 0)$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Tf_{(1,0)}(x, y) &= f(1, 0) + (x - 1, y - 0) \operatorname{grad} f(1, 0) + \frac{1}{2} (x - 1, y - 0) \operatorname{Hess} f(1, 0) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + (x - 1, y) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x - 1, y) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + 2(x - 1) - 3y + \frac{1}{2} (2(x - 1)^2 - 4(x - 1)y + 2y^2) \\ &= x^2 - 2xy + y^2 - y. \end{aligned}$$

## 2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien die beiden Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 2\},$$

sowie die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = 2xy.$$

- (i) Skizzieren Sie die Mengen  $A$  und  $B$ .  
 (ii) Integrieren Sie die Funktion  $f$  über die Mengen  $A$  und  $B$ .

- (i) **(4 Punkte)**

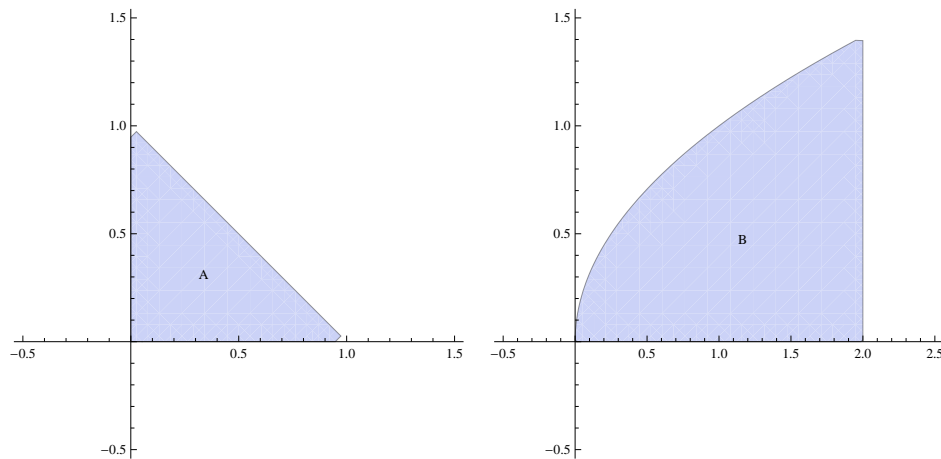


Abbildung 1: Skizze der Menge  $A$  (links) und der Menge  $B$  (rechts).

- (ii) **(4 Punkte)** Für das Integral von  $f$  über die Menge  $A$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy \, dy \, dx = \int_0^1 [xy^2]_{y=0}^{y=1-x} \, dx = \int_0^1 x(x-1)^2 \, dx \\ &= \int_0^1 x^3 - 2x^2 + x \, dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Für das Integral von  $f$  über die Menge  $B$  erhalten wir

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} 2xy \, dy \, dx = \int_0^2 [xy^2]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \, dx = \int_0^2 x^2 \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}.$$

### 3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben seien die Kurven

$$\vec{c}_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}_1(t) = (t, t^2, t^3)^T,$$

$$\vec{c}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}_2(t) = (t, t, t)^T,$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ (x^3 - z)(z - y) \\ (x^2 - y)(y - x) \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die Kurvenintegrale  $\int_{\vec{c}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  und  $\int_{\vec{c}_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ .

(ii) Besitzt  $\vec{v}$  ein Potential?

(i) **(7 Punkte)** Für die Kurve  $\vec{c}_1$  gilt

$$\dot{\vec{c}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\vec{v}(\vec{c}_1(t)) = \begin{pmatrix} t \cdot t^2 \\ (t^3 - t^3)(t^3 - t^2) \\ (t^2 - t^2)(t^2 - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für  $\vec{c}_2$  erhalten wir

$$\dot{\vec{c}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\vec{v}(\vec{c}_2(t)) = \begin{pmatrix} t \cdot t \\ (t^3 - t)(t - t) \\ (t^2 - t)(t - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{c}_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \vec{v}(\vec{c}_1(t)) \cdot \dot{\vec{c}}_1(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^3 dt \\ &= \left[ \frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{4} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_{\vec{c}_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \vec{v}(\vec{c}_2(t)) \cdot \dot{\vec{c}}_2(t) dt \\
 &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_0^1 t^2 dt \\
 &= \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 \\
 &= \left( \frac{1}{3} - 0 \right) \\
 &= \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

- (ii) **(3 Punkte)** Da  $\vec{c}_1(0) = (0, 0, 0)^T = \vec{c}_2(0)$  und  $\vec{c}_1(1) = (1, 1, 1)^T = \vec{c}_2(1)$ , haben  $\vec{c}_1$  und  $\vec{c}_2$  die gleichen Anfangs- und Endpunkte. Falls  $\vec{v}$  ein Potentialfeld wäre, so wären Kurvenintegrale von  $\vec{v}$  wegunabhängig. Da die Integrale von  $\vec{v}$  über  $\vec{c}_1$  bzw.  $\vec{c}_2$  nicht übereinstimmen, kann  $\vec{v}$  kein Potentialfeld sein.

**Alternativ:** Falls  $\vec{v}$  ein Potentialfeld ist, muss  $\vec{v}$  die notwendige Bedingung erfüllen, dass  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  ist. Mit der Notation

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xy \\ (x^3 - z)(z - y) \\ (x^2 - y)(y - x) \end{pmatrix}$$

gilt

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = 3x^2(z - y), \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = x.$$

Damit ist

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ 3x^2(z - y) - x \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist  $\text{rot } \vec{v} \neq \vec{0}$  für  $x = 1, y = z = 0$ . Da  $\vec{v}$  nicht wirbelfrei ist, ist  $\vec{v}$  kein Potentialfeld.

#### 4. Aufgabe

12 Punkte

- (i) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die durch

$$\vec{x} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos^3(t) \\ 2 \sin^3(t) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

- (ii) Berechnen Sie das Volumen des durch

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

gegebenen Körpers durch Integration.

- (iii) Untersuchen Sie, ob das durch

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x(\sin(y) + 1) - e^z \\ 3xyz^2 + \cos(y) \\ \sin(y) - xz^3 \end{pmatrix}$$

gegebene Vektorfeld ein Vektorpotential besitzt.

---

- (i) **(4 Punkte)** Um die Länge der Kurve  $\vec{x}$  zu berechnen, benötigen wir die partiellen Ableitungen nach  $t$ . Es gilt

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 6 \cos^2(t) \sin(t) \\ 6 \sin^2(t) \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Die Länge von  $\vec{x}$  ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_{\vec{x}} 1 ds &= \int_0^{\pi/2} |\dot{\vec{x}}(t)| dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(6 \cos^2(t) \sin(t))^2 + (6 \sin^2(t) \cos(t))^2} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36 \cos^4(t) \sin^2(t) + 36 \sin^4(t) \cos^2(t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36 \cos^2(t) \sin^2(t)} \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} |6 \cos(t) \sin(t)| \sqrt{1} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 6 \cos(t) \sin(t) dt. \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $u = \sin(t)$ ,  $du = \cos(t) dt$ , gilt weiter

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 6u du \\ &= [3u^2]_0^1 \\ &= 3 - 0 \\ &= 3, \end{aligned}$$

wobei wir oben benutzt haben, dass  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$  (trigonometrischer Pythagoras) sowie, dass die Sinus- und die Kosinusfunktion im Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$  nicht-negativ sind.

- (ii) **(5 Punkte)** Das Volumen von  $K$  lässt sich durch  $\iiint_K 1dV$  berechnen. Wir schreiben  $K$  in Zylinderkoordinaten

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \mid \rho^2 \leq z \leq 1, \rho \geq 0, \phi \in [0, 2\pi] \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix} \mid 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1, \rho^2 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Ferner gilt für das Volumenelement

$$dV = \rho dz d\rho d\phi.$$

Damit berechnet man

$$\begin{aligned} \iiint_K 1dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\rho^2}^1 \rho dz d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho z]_{\rho^2}^1 d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho - \rho^3 d\rho d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\phi \\ &= \left[ \frac{1}{4}\phi \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4} 2\pi - 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- (iii) **(3 Punkte)** Falls  $\vec{v}$  ein Vektorpotential besitzt, muss  $\vec{v}$  die notwendige Bedingung erfüllen, dass  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  ist. Hier haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(x(\sin(y) + 1) - e^z) + \frac{\partial}{\partial y}(3xyz^2 + \cos(y)) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(y) - xz^3) \\ &= (\sin(y) + 1) + (3xz^2 - \sin(y)) - 3xz^2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass  $\vec{v}$  kein Vektorpotential besitzt.

## 5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\},$$

sowie die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = 2x + y^2.$$

Begründen Sie, dass  $f$  auf  $D$  ein Minimum und ein Maximum annimmt und ermitteln Sie alle globalen Extremstellen.

Als abgeschlossene Kugel ist  $D$  kompakt. Da  $f$  als Verknüpfung stetiger Abbildungen wieder stetig ist, muss es, nach dem Satz vom Minimum and Maximum, auf  $D$  sowohl ein Minimum als auch ein Maximum annehmen. Es gilt:

$$f'(x, y) = (2 \ 2y).$$

Da  $f' \neq 0$ , gibt es keine lokalen und somit auch keine globalen Extremstellen im Inneren von  $D$ . Damit müssen alle Extremstellen auf dem Rand von  $D$  liegen. Der Rand von  $D$  ist die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 2\}$ , wobei  $g(x, y) := x^2 + y^2$ . Es gilt:

$$g'(x, y) = (2x \ 2y).$$

Offenbar gilt  $g' \neq 0$  auf dem Rand von  $D$ , da sonst  $g(x, y) = 0$ . Damit können wir die notwendige Bedingung aus dem regulären Fall der Methode von Lagrange aufstellen:

$$f'(x, y) = (2 \ 2y) = \lambda \cdot (2x \ 2y) = \lambda \cdot g'(x, y),$$

d.h. es muss  $2 = \lambda \cdot 2x$  und  $2y = \lambda \cdot 2y$  gelten.

Falls  $y \neq 0$ , so gilt  $\lambda = 1$  wegen der zweiten Gleichung, so dass  $x = 1$  folgt, woraus wir wegen  $x^2 + y^2 = 2$  sofort  $y = \pm 1$  erhalten.

Falls  $y = 0$ , so erhalten wir sofort aus  $x^2 + y^2 = 2$ :  $x = \pm\sqrt{2}$ .

Zusammengefasst erhalten wir die kritischen Punkte  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(\sqrt{2}, 0)$ ,  $(-\sqrt{2}, 0)$ . Es gilt  $f(1, 1) = 3$ ,  $f(1, -1) = 3$ ,  $f(\sqrt{2}, 0) = 2\sqrt{2}$ ,  $f(-\sqrt{2}, 0) = -2\sqrt{2}$ . D.h. in den ersten beiden Punkten wird das Maximum angenommen und in dem vierten das Minimum. Das sind die einzigen globalen Extremstellen.

## 6. Aufgabe

12 Punkte

(i) Geben Sie zu folgenden Teilaufgaben jeweils ein Beispiel an. Dabei müssen Sie Ihre Wahl nicht begründen.

(a) Eine abgeschlossene Menge  $A \subset \mathbb{R}^3$ , welche nicht kompakt ist.

(b) Eine offene nichtleere Menge  $B \subset \mathbb{R}^2$  und eine stetige Funktion  $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ , welche auf  $B$  weder ihr Minimum, noch ihr Maximum annimmt.

(ii) Begründen Sie folgende Aussagen oder widerlegen Sie diese.

(c) Sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y, z) = 5x^2y - e^{yz}.$$

Die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $(1, 2, 0)$  in Richtung  $\frac{1}{\sqrt{17}}(1, -4, 0)^T$  ist null.

(d) Die Funktion  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  und

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2+y^2)^2}{\sin(x^2+y^2)}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Nullpunkt partiell nach  $y$  differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 1.$$

(i) (a) **(3 Punkte)** Die Menge  $A = \mathbb{R}^3$  ist abgeschlossen, aber nicht kompakt, da  $A$  unbeschränkt ist.

(b) **(3 Punkte)** Die Menge  $B = \mathbb{R}^2$  ist offen und unbeschränkt und die stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x$  nimmt weder ihr Minimum, noch ihr Maximum an.

(ii) (c) **(3 Punkte)** Diese Aussage ist wahr! Mit

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 10xy \\ 5x^2 - ze^{-yz} \\ -ye^{-yz} \end{pmatrix}$$

ist die Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $(1, 2, 0)$  in Richtung  $\frac{1}{\sqrt{17}}(1, -4, 0)^T$  gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{17}} \text{grad } f(1, 2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(d) (**3 Punkte**) Diese Aussage ist falsch! Wir erhalten nämlich

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(0,t) - g(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^4}{\sin(t^2)} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{\sin(t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{2t \cos(t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t}{2 \cos(t^2)} = 0 \neq 1,$$

wobei wir im drittletzten Schritt die Regel von l'Hopital benutzt haben.