

Oktober – Klausur  
Analysis II B für Ingenieure

Nachname: ..... Vorname: .....  
Matr.-Nr.: ..... Studiengang: .....

---

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Die Aufgabenblätter sind mitabzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte.

Die Achsen der in Aufgabe 4 dargestellten Koordinatensysteme sind wie üblich linear skaliert.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

---

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

---

**Korrektur**

1	2	3	4	5	6	$\Sigma$

## 1. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z \\ x + 2y \\ 3z - y \end{pmatrix}$$

und das Skalarfeld

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xy^2 + yz.$$

- (i) Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob der Ausdruck in der linken Spalte ein Skalarfeld, ein Vektorfeld oder nicht definiert ist.

	Skalarfeld	Vektorfeld	nicht definiert
$\text{grad}(f \cdot \text{div}(\vec{v}))$			
$\text{rot}(\vec{v} \cdot \text{div}(f))$			
$\text{div}(\text{grad}(f))$			
$\text{grad}(\text{rot}(f))$			
$\text{div}(\text{rot}(\vec{v}))$			
$\text{rot}(\text{div}(f))$			

- (ii) Berechnen Sie die definierten Ausdrücke aus Aufgabenteil (i).

## 2. Aufgabe

8 Punkte

Die Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(x, y, z) = x^2 + 2yz + \frac{1}{2}y^2 + z^2 - \frac{1}{3}z^3.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und Sattelpunkte der Funktion  $f$ .

## 3. Aufgabe

12 Punkte

Es sei  $\gamma$  der Viertelkreis in der Ebene  $y = 0$  mit Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$  von  $(1, 0, 0)$  nach  $(0, 0, 1)$ . Gegeben seien außerdem die Kurve  $\vec{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} \cdot t) \\ t^2 - t \\ t \end{pmatrix},$$

sowie das Vektorfeld  $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x + y \\ x - 2y - 2z \\ 6z - 2y \end{pmatrix}.$$

- (i) Parametrisieren Sie  $\gamma$ .
- (ii) Integrieren Sie  $\vec{v}$  über  $\gamma$ .
- (iii) Zeigen Sie, dass  $\vec{v}$  die notwendige und die hinreichende Potentialbedingung erfüllt und bestimmen Sie anschließend ein Potential von  $\vec{v}$ .
- (iv) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals  $\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ .

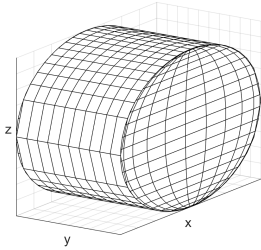
#### 4. Aufgabe

10 Punkte

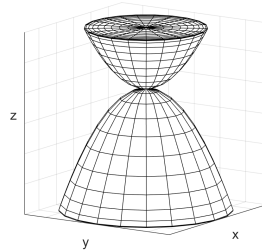
Gegeben seien die Funktionen  $\vec{\Phi}_1 : [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\vec{\Phi}_2 : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\vec{\Phi}_1(r, s, t) = t \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Phi}_2(r, \phi, h) = \begin{pmatrix} 2r \cos \phi \\ h \\ r \sin \phi \end{pmatrix}.$$

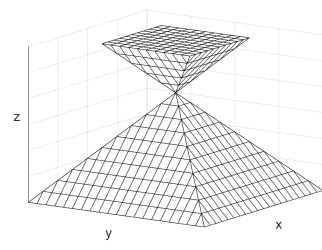
- (i) Entscheiden Sie jeweils, welche der folgenden Abbildungen die Bildmengen der Funktionen  $\vec{\Phi}_1$  und  $\vec{\Phi}_2$  darstellen.



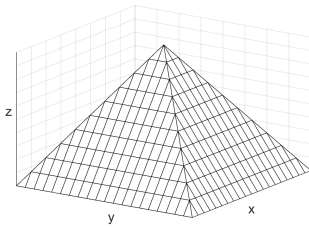
(a)



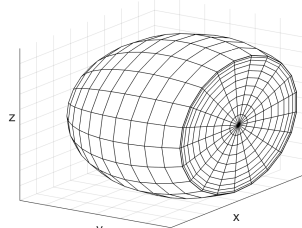
(b)



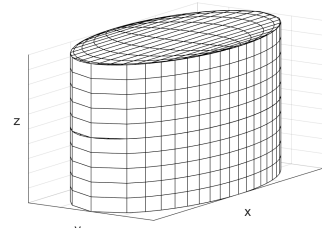
(c)



(d)



(e)



(f)

- (ii) Bestimmen Sie die Ableitungsmatrizen  $\vec{\Phi}'_1$  und  $\vec{\Phi}'_2$ . Weisen Sie nach, dass  $\det(\vec{\Phi}'_1) = t^2$  und berechnen Sie außerdem  $\det(\vec{\Phi}'_2)$ .
- (iii) Berechnen Sie das Integral

$$\iiint_{\text{Bild}(\vec{\Phi}_1)} x^2 - y \, dx \, dy \, dz.$$

#### 5. Aufgabe

10 Punkte

- (i) Gegeben sei der Bereich  $A \subset \mathbb{R}^2$ , der von den Geraden  $x = 0$  und  $y = x - \frac{\pi}{2}$  und der Kurve  $y = \cos x$  eingeschlossen wird.
- (a) Skizzieren Sie  $A$ .
- (b) Integrieren Sie die Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = \cos(x)$  über  $A$ .
- (ii) Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = ye^{xyz} - (x + z)$ , sowie die Fläche

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 1\}.$$

Zeigen Sie: Der Vektor  $(6, 2, -2)$  steht senkrecht auf  $F$  im Punkt  $(0, 2, 1) \in F$ .

## 6. Aufgabe

12 Punkte

(i) Begründen Sie die folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$

und seien  $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g_1: B \rightarrow \mathbb{R}^3$  differenzierbar. Dann besitzt die Funktion  $h = -f_1 \circ g_1$  ein globales Maximum.

(b) Seien  $f_2, g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Nimmt die Funktion  $f_2$  ein globales Minimum unter der Nebenbedingung  $g_2 = 0$  an, so ist die Menge  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g_2(\vec{x}) = 0\}$  kompakt.

(c) Sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  offen und nichtleer und sei  $\vec{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar mit  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$  und  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Dann ist  $\vec{v}$  konstant.

(ii) Begründen Sie die folgenden Aussagen.

(d) Die Funktion

$$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{|x|+y^2}}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist im Punkt  $(0, 0)$  nicht stetig.

(e) Die Abbildung

$$f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(2x+y^2-2)-1}{x^2+2y-1}, & \text{falls } x^2 + 2y \neq 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist im Punkt  $(1, 0)$  partiell nach  $x$  differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(1, 0) = -1.$$