TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS2005
Fakultät II – Institut für Mathematik
Ferus • Senkbeil

Lösungen zum Rechenteil der Ana3-Klausur vom 19.7.2005

1. Aufgabe

10 Punkte

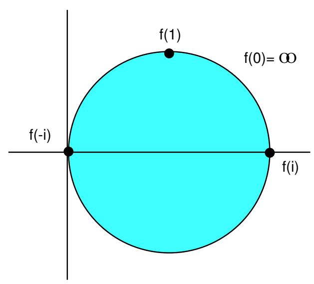
Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned} f(z) = 1 + \frac{i}{z} &= w \\ z + i &= wz \\ z(w-1) &= i \\ f^{-1}(w) = z &= \frac{i}{w-1} \end{aligned}$$

Bild- und Urbildpunkte:

$$\begin{aligned} f(0) = \infty\ , \quad & f(1) = 1+i\ , \quad f(\infty) = 1 \\ f^{-1}(0) = -i\ , \quad & f^{-1}(1) = \infty\ , \quad f^{-1}(\infty) = 0 \end{aligned}$$

Skizze: Berechnung eines weiteren Bildpunktes des Einheitskreises $f(i) = 2$;



2. Aufgabe

10 Punkte

Laurentreihenentwicklung mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$\frac{z}{2z-1} = -z\frac{1}{1-2z} = -z\sum_{k=0}^{\infty}(2z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -2^k z^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} -2^{k-1} z^k$$

Diese Reihe konvergiert absolut für $|2z| < 1$, also $|z| < \frac{1}{2}$.

$$\frac{z}{2z-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{z}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{k-1} z^k$$

Diese Reihe konvergiert absolut für $|\frac{1}{2z}| < 1$, also $|z| > \frac{1}{2}$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Innerhalb des Kreises $|z| = 2$ hat Cosinus genau bei $z = -\frac{\pi}{2}$ und bei $z = +\frac{\pi}{2}$ Nullstellen. Der Integrant hat demnach genau dort Polstellen bzw. nicht verschwindende Residuen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\cos z}, -\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{-\sin(-\frac{\pi}{2})} = 1 \ , \\ \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\cos z}, +\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{-\sin(+\frac{\pi}{2})} = -1 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit dem Residuensatz:

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{\cos z} \, dz = 2\pi i(1-1) = 0$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gleichgewichtspunkte:

$$F(y, w) = \begin{pmatrix} 2y - 3w + 1 \\ 5w - 4y - w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erste Zeile:	$2y = 3w - 1$
eingesetzt in die zweite:	$5w - 2(3w - 1) - w^2 = 0$
	$w^2 + w - 2 = 0$
	$w = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$
	$w_1 = 1, \ w_2 = -2$
und wieder in die erste ergibt die GGP.	$(1, 1), \ \left(-\frac{7}{2}, -2\right)$

Von $(1, 1)$ soll das Stabilitätsverhalten untersucht werden. Dazu werden die Eigenwerte von

$$F'(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 - 2w \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

benötigt:

$$\begin{aligned} & (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 12 = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} \\ \Rightarrow \quad & \lambda_1 = 6 \ , \quad \lambda_2 = -1 \ . \end{aligned}$$

Ein Eigenwert (λ_1) hat positiven Realteil, somit ist der GGP instabil.