Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 06

Prof. Dr. Ferus 10. Oktober 2006

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen, sondern nur ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Beschreiben Sie geometrisch (mit einer Skizze) folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

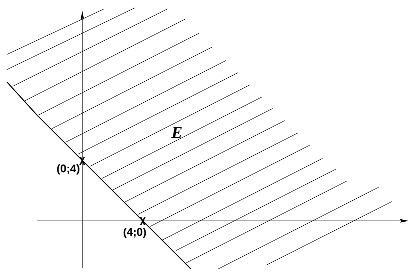
a) $E = \{z \in \mathbb{C} : Re((1-\iota)z - 4) > 0\}$.

b) $F = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 2Re(z) + 3\}$.

a) Mit $z = x + \iota y$ erhält man

$$Re((1-\iota)z-4) = Re\left((1-\iota)(x+\iota y) - 4\right) = Re\left(x + y - 4 + \iota(y-x)\right) = x+y-4,$$

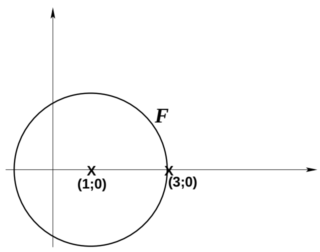
also ist E die unten skizzierte offene Halbebene.



b) Wieder mit Kartesischen Koordinaten hat man hier

$$|z|^2 - 2Re(z) = x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1,$$

also ist $F = \{z \in \mathbb{C} : (Re(z)-1)^2 + Im(z)^2 = 4\}$ den unten skizzierten Kreis (um $(1;0)$ zentriert, mit Radius 2).



2. Aufgabe

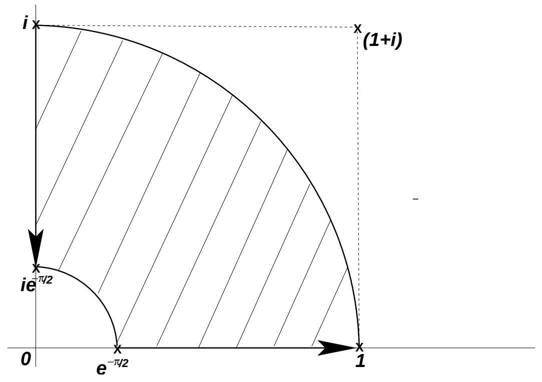
8 Punkte

Für die Abbildung $f(z) = \iota^z = w$ bestimme und skizziere man das Bild des Quadrates mit den Ecken $0, 1, (1+\iota), \iota$.

Für $x \in [0;1]$ gilt

$$f(x) = e^{\iota\frac{\pi}{2}x}, f(1+\iota x) = e^{\iota(1+\iota x)\frac{\pi}{2}} = \iota e^{-\frac{\pi}{2}x}, f(x+\iota) = e^{\iota\frac{\pi}{2}(x+\iota)} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{\iota\frac{\pi}{2}x}, f(x\iota) = e^{-\frac{\pi}{2}x}.$$

Die erste Gleichung zeigt, daß das Segment $[0;1]$ auf einem Kreisbogen des Radius 1 um die 0 abgebildet wird, zweitens sieht man, daß das Segment $[1;(1+\iota)]$ auf dem Segment $[\iota; e^{-\frac{\pi}{2}}\iota]$ abgebildet wird, drittens wird das Segment $[(1+\iota);\iota]$ auf einem Kreisbogen des Radius $e^{-\frac{\pi}{2}}$ um die 0 abgebildet, und schließlich wird das Segment $[\iota;0]$ auf dem Segment $[e^{-\frac{\pi}{2}};1]$ abgebildet. Damit läßt sich das Bild des angegebenen Quadrates durch f skizzieren (siehe unten).



3. Aufgabe

8 Punkte

Skizzieren Sie den konzentrischen Kreisring

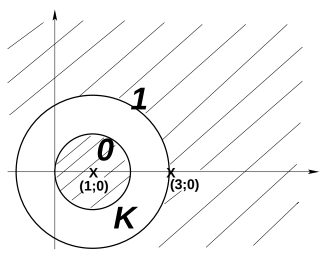
$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4\},$$

und geben Sie die Lösung zum Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} \Delta h(x,y) &= 0, \text{ für } 1 < (x-1)^2 + y^2 < 4 \\ h(x,y) &= 0, \text{ für } (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ h(x,y) &= 1, \text{ für } (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

an. (**Hinweis**: keine langen Berechnungen nötig, Lösung basiert auf einer sehr bekannten Funktion).

Das angegebene Dirichlet-Problem entspricht folgende Skizze:



Bekannt ist, daß jede Funktion von der Art $h(x,y) = A + B \ln \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ harmonisch auf K ist, und wir müssen nur noch die reellen Konstanten A und B richtig wählen, damit die vorgegebenen Randbedingungen getroffen werden. Für $(x-1)^2 + y^2 = 1$ hat man $h(x,y) = A$, und für $(x-1)^2 + y^2 = 4$ erhält man $h(x,y) = A + B \ln 2$, also sind die gesuchten Konstanten $A = 0$, $B = 1/\ln 2$, und die eindeutige Lösung zum Dirichlet-Problem $h(x,y) = \frac{\ln \sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\ln 2} = \frac{\ln\left((x-1)^2+y^2\right)}{2 \ln 2}$.

4. Aufgabe

8 Punkte

Seien $f(z) = \frac{\cos(\frac{1}{z^2})}{z^2(z+1)^2}$ und $g(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^4}$.
Geben Sie die Singularitäten von f und g an und entscheiden Sie in jedem Fall, ob es wesentliche Singularitäten oder Polstellen sind. Falls eine Polstelle vorhanden ist, geben Sie auch ihre Ordnung an.

- $z_0 = 0$ ist eine wesentliche Singularität von f (die Laurent-Reihenentwicklung von f um $z_0 = 0$ beinhaltet unendlich viele Termen negativer Ordnung), während $z_1 = -1$ eine Polstelle zweiter Ordnung ist.

• $z_0 = 0$ ist eine Polstelle zweiter Ordnung von g, weil $g(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^2} \cdot \frac{1}{z^2} = g_1(z) \cdot g_2(z)$, und für g_1 ist $z_0 = 0$ nur eine hebbare Singularität.

5. Aufgabe

8 Punkte

Für jedes $\lambda > 0$ ist die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung

$$x^4 u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

durch $u(x) = x\left(A \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{x} + B\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)$ gegeben, wobei A, B reelle Koeffizienten sind.
Falls diese Differentialgleichung auf dem Interval $[\frac{1}{2}; 1]$ betrachtet wird zusammen mit Dirichletschen Randbedingungen ($u(\frac{1}{2}) = u(1) = 0$), was sind die Eigenwerte λ_k und zugehörige Eigenfunktionen $u_k(x)$?
(**Hinweis**: $\sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{1/2})\cos\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda}\cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{1/2}) = \sin\sqrt{\lambda}$).
Welche Orthogonalitätsrelation genügen die Eigenfunktionen u_k und u_l für $k \neq l$?

Für die allgemeine Lösung $u(x) = x\left(A \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{x} + B\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{x}\right)$ lassen sich die Randbedingungen umschreiben als folgendes System (wo A und B die unbekannten sind):

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{\lambda})A + (\frac{1}{2}\cos 2\sqrt{\lambda})B &= 0 \\ (\sin\sqrt{\lambda})A + (\cos\sqrt{\lambda})B &= 0 \end{cases}$$

Die Determinante dieses Systems ist $\sin(2\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda}\cos(2\sqrt{\lambda}) = \sin\sqrt{\lambda}$, also besitzt es eine nicht-triviale Lösung genau dann, wenn $\sin\sqrt{\lambda} = 0$. Die Eigenwerte des betrachteten Problems sind also durch $\lambda_k = k^2\pi^2$ gegeben, wobei $k \geq 1$ und ganz ist, und die entsprechende Eigenfunktion u_k zu λ_k ist durch $u_k(x) = x\sin\frac{k\pi}{x}$ gegeben ($A \neq 0$ und $B = 0$ liefert eine nicht-triviale Lösung zum obigen System für jede Eigenwert λ_k).
Schließlich erfüllen zwei verschiedene Eigenfunktionen u_k, u_l die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{1/2}^{1} u_k(x)u_l(x) \cdot \frac{1}{x^4}dx = 0$$

(siehe Skript).