Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik 21 juli 2009

Juli-Klausur (Rechenteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Keine Taschenrechner und Aufzeichnungen zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Es ist $\frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}\cos(ay)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9e^{3x}\cos(ay)$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = -ae^{3x}\sin(ay)$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -a^2e^{3x}\cos(ay)$.

Damit ist $\Delta u(x,y) = (9-a^2)e^{3x}\cos(ay)$.

Die Funktion u ist dann für $a=3$ harmonisch.

Die gesuchte Funktion v erfüllt die Cauchy-Riemannsche DGL:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}\cos(3y) \text{ und } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 3e^{3x}\sin(3y)$$

d.h $v(x,y) = e^{3x}\sin(3y) + F(x)$ und $-3e^{3x}\sin(3y) - F'(x) = -3e^{3x}\sin(3y) \Rightarrow F(x) = c \in \mathbb{R}$.

Aus der Bedingung $f(0) = 1+i$ folgt: $u(0,0) + iv(0,0) = e^0\cos(0) + i(e^0\sin(0)+c) = 1+i$ d.h $1+ci = 1+i \Rightarrow c = 1$.

Damit ist $v(x,y) = e^{3x}\sin(3y)+1$ und

$$f(x+iy) = e^{3x}\cos(3y) + i(e^{3x}\sin(3y)+1).$$

2. Aufgabe

10 Punkte

(i) Es gilt:

$$f(z) := \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-i+i-1} = \frac{1}{i-1}\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} = \frac{1}{i-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(z-i)^k}{(1-i)^{k+1}}\right).$$

(ii) Es ist

$$g(z) = \frac{1}{z-i}\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(z-i)^k}{(1-i)^{k+1}}\right) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(z-i)^{k-1}}{(1-i)^{k+1}}\right) = -\sum_{k=-1}^{\infty}\left(\frac{(z-i)^k}{(1-i)^{k+2}}\right).$$

der Hauptteil der Laurentreihe ist $-\frac{1}{(1-i)(z-i)}$ und der Nebenteil ist $-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(z-i)^k}{(1-i)^{k+2}}\right)$.

(iii) g hat zwei Singularitäten $z_0 = 1$ und $z_1 = i$. Beide sind Pole 1. Ordnung und es gilt $\mathrm{Res}(g(z),1) = \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}(1+i)$ und $\mathrm{Res}(g(z),i) = \frac{1}{i-1} = -\frac{1}{2}(1+i)$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Mit der Substitution $z = e^{it} \Rightarrow dz = iz\,dt$, erhalten wir:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(10-6\cos t)} = \int_{K(0,1)}\frac{dz}{iz(10-3z-3\frac{1}{z})} = -i\int_{K(0,1)}\frac{dz}{(10z-3z^2-3)}.$$

Die Polstellen sind $z_1 = \frac{1}{3}$ und $z_2 = 3$ mit $z_1 \in D(0,1)$ und $z_2 \notin D(0,1)$. Damit ist

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(10-6\cos t)} = \int_{K(0,1)}\frac{i\,dz}{3(z-3)(z-\frac{1}{3})} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{i}{(3z-1)(z-3)},\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4. Aufgabe

11 Punkte

(i) Es ist $u_2 = 2u_1 + 8u_0 = 12$,$u_3 = 2u_2 + 8u_1 = 40$ and $u_4 = 2u_3 + 8u_2 = 176$.

(ii) Es gilt:

$$z^2(F(z) - u_0 - u_1 z^{-1}) = 2z(F(z) - u_0) + 8F(z).$$

Daraus folgt:

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z - 8}.$$

(iii) Es ist

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 2z - 8} = \frac{z}{(z+2)(z-4)} = \frac{2(z+2) + z - 4}{3(z+2)(z-4)} = \frac{2}{3(z-4)} + \frac{1}{3(z+2)}.$$

(iv) Es gilt:

$$F(z) = \frac{2z}{3(z-4)} + \frac{z}{3(z+2)} = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty} 4^k z^{-k} + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k z^{-k}.$$

Daraus folgt:

$$u_k = \frac{2}{3}4^k + \frac{1}{3}(-2)^k$$

für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

$\Rightarrow u_2 = \frac{2}{3}(16) + \frac{1}{3}(4) = 12$, $u_3 = \frac{2}{3}(64) + \frac{1}{3}(-8) = 40$ und $u_4 = \frac{2}{3}(256) + \frac{1}{3}(16) = 176$.