Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik 21 juli 2009

Juli-Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Seien $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\vec{F}(x,y,z) = (2y(z-1), -x(z-1), -z^3)$ und $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

(i) Bestimmen Sie a, b und c so, dass $< \text{grad}_{(x,y,z)} V, \vec{F}(x,y,z) > \leq 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Bestimmen Sie die GGPe des nichtlinearen DGL-Systems

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_2(x_3 - 1) \\ x_2' &= -x_1(x_3 - 1) \\ x_3' &= -x_3^3 \end{cases}$$

und untersuchen Sie (unter Verwendung von (i)) die Stabilität des Systems in diesen Punkten.

2. Aufgabe

8 Punkte

Bestimmen Sie mit Hilfe des Residuensatzes $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+2x+x^2}\, dx$.

Hinweis: Was kann man über das Integral $\oint\limits_{K^+(0,R)} \frac{1}{2+2z+z^2}\, dz$ mit $K^+(0,R) = \{Re^{it},\ t \in [0,\pi]\}$ sagen?

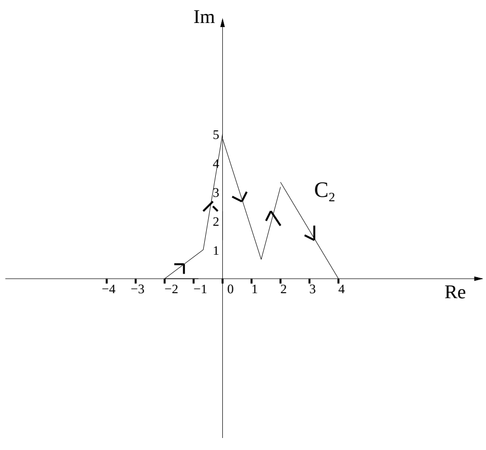
3. Aufgabe

9 Punkte

Untersuchen Sie, ob das Kurvenintegral

$$\int_{C_i} \frac{(z-1)}{z - i\pi}\, dz$$

über die positiv orientierte Kurve $C_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 3,\ \ \text{Im}(z) \leq 0\}$ und die unten dargestellte Kurve C_2 jeweils denselben Wert ergibt.



4. Aufgabe

8 Punkte

Sei f die Möbiustransformation definiert durch $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

(i) Bestimmen Sie das Bild des ersten Quadranten $G := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0 \text{ und } \text{Re}(z) > 0\}$ unter f.

(ii) Zeigen Sie, dass $f(-\bar{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(iii) Folgern Sie aus (i) und (ii), dass $f(H) = D(0,1)$, wobei $H := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ und $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist.

5. Aufgabe

6 Punkte

Sei $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ und H, $D(0,1)$ wie in Aufgabe 4 iii) definiert.

(i) Angenommen, auf $\mathbb{R} = \partial H$ ist die (stetige) Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ gegeben. Wie lautet die entsprechend der 1. RWA (Randwertaufgabe) nach der Einheitskreisscheibe $D(0,1)$ verpflanzte Randfunktion $\psi : K(0,1) \to \mathbb{R}$ mit $K(0,1) = \partial D(0,1)$. Ist es

(a) $\psi(e^{i\theta}) = \frac{1}{(1+\theta^2)}$, (b) $\psi(e^{i\theta}) = \sin^2(\frac{\theta}{2})$ oder (c) $\psi(e^{i\theta}) = \frac{-\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}$?

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(ii) Angenommen, die zur Randfunktion $\psi : K(0,1) \to \mathbb{R}$ gehörige eindeutige harmonische Lösung der 1. RWA in $D(0,1)$ heiße $u(w)$. Wie lautet dann die zu $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gehörige eindeutige harmonische Lösung $U(z)$ der 1.RWA in H ?

(Hinweis: Machen Sie eine Skizze zu dem Sachverhalt).