Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik 21 juli 2009

Juli-Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

(i) Es ist

$$< \text{grad}_{(x,y,z)} V, \vec{F}(x,y,z) >= (4a-2b)xy(z-1) - 2cz^4.$$

Die Bedingung $< \text{grad}_{(x,y,z)} V, \vec{F}(x,y,z) > \leq 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ist erfüllt für $4a = 2b$ und $c > 0$.

Wir wählen $a = 1,\ b = 2$ und $c = 1$.

(ii) (x_0, y_0, z_0) ist ein G.G.P $\Leftrightarrow 2y_0(z_0-1) = x_0(z_0-1) = z_0^3 = 0$ d.h $x_0 = y_0 = z_0$.

Der einzige G.G.P ist also $(0,0,0)$.

Die Funktion V besitzt ein striktes Minimum bei $(0,0,0)$ und es gilt $< \text{grad}_{(x,y,z)} V, \vec{F}(x,y,z) > \leq 0$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow V$ ist eine Lyapunov Funktion des Systems $\Rightarrow$ das System ist stabil im Punkt $(0,0,0)$.

Da $< \text{grad}_{(x,y,0)} V, \vec{F}(x,y,0) >= 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ können wir keine Aussage über eine asymptotische Stabilität im Punkt $(0,0,0)$ treffen .

2. Aufgabe

8 Punkte

Es ist $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+2x+x^2}\, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < +\infty$ und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+2x+x^2}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{2+2x+x^2}\, dx.$$

Wir integrieren entlang der positiv orientierten Kurve $K^+(0,R) = \partial D^+(0,R)$ mit $D^+(0,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z^2+2z+2}$ hat zwei Polstellen: $z_1 := -1+i$ und $z_2 := -1-i$ mit $z_1 \in D^+(0,R)$ und $z_2 \notin D^+(0,R)$.

Nach dem Residuensatz gilt:

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{2+2x+x^2}\, dx + \oint\limits_{K^+(0,R)} \frac{1}{2+2z+z^2}\, dz = 2\pi i \,\text{Res}\Big(\frac{1}{2+2z+z^2}, -1+i\Big) = 2\pi i \frac{1}{-1+i+1+i} = \pi.$$

Daraus folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+2x+x^2}\, dx = \pi - \lim_{R \to +\infty} \oint\limits_{K^+(0,R)} \frac{1}{2+2z+z^2}\, dz.$$

Da $\text{Grad}(z^2+2z+2) = 2 \geq 0 + 2 = \text{Grad}(1) + 2$, ist $\lim\limits_{R \to +\infty} \oint\limits_{K^+(0,R)} \frac{1}{2+2z+z^2}\, dz = 0.$ Damit ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+2x+x^2}\, dx = \pi.$$

3. Aufgabe

9 Punkte

Die Kurve $C_1 \cup (-C_2))$ ist eine positiv orientierte geschlossene Kurve.

Die Funktion $z \mapsto \frac{(z-1)}{z-i\pi}$ ist nicht analytisch in $I_{C_1 \cup (-C_2)}$ und hat eine Polstelle 1. Ordnung im Punkt $z_0 := i\pi \in I_{C_1 \cup (-C_2)} \Rightarrow$ das Integral ist nicht unbedingt wegunabhängig.

Nach dem Residuensatz gilt:

$$\oint_{C_1} \frac{(z-1)}{z-i\pi}\, dz - \int_{C_2} \frac{(z-1)}{z-i\pi}\, dz = 2i\pi \operatorname{Res}\big(\frac{(z-1)}{z-i\pi}, i\pi\big) = 2i\pi(i\pi - 1) \neq 0.$$

Daher ist

$$\oint_{C_1} \frac{(z-1)}{z-i\pi}\, dz \neq \int_{C_2} \frac{(z-1)}{z-i\pi}\, dz.$$

4. Aufgabe

8 Punkte

(i) Es ist $\partial G = \Delta_1 \cup \Delta_2$, wobei

$$\Delta_1 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0 \text{ und } \text{Re}(z) > 0\} \text{ und } \Delta_2 := \{\text{Im}(z) > 0 \text{ und } \text{Re}(z) = 0\}.$$

Weiterhin ist $f(0) = -1,\ f(1) = -i,\ f(\infty) = 1 \Rightarrow f(\Delta_1) = K^-(0,1)$, wobei $K^-(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ und } \text{Im}(z) \leq 0\}$

und $f(0) = -1,\ f(i) = 0,\ f(\infty) = 1 \Rightarrow f(\Delta_2) = \Delta_1$.

Damit ist

$$f(G) = D^-(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ und } \text{Im}(z) \leq 0\}.$$

(ii) Es ist

$$f(-\bar{z}) = \frac{-\bar{z} - i}{-\bar{z} + i} = \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} - i} = \frac{\overline{z - i}}{\overline{z + i}} = \overline{\frac{z - i}{z + i}} = \overline{f(z)}.$$

(iii) Es ist $H = G \cup (-\bar{G})$ mit $\bar{G} := \{\bar{z},\ z \in G\}$ und $-\bar{G} := \{-\bar{z},\ z \in G\}$.

Daher ist

$$\begin{aligned} f(H) &= f(G) \cup f(-\bar{G}) = f(G) \cup \{f(-\bar{z}),\ z \in G\} \\ &= f(G) \cup \{\overline{f(z)}, z \in G\} = f(G) \cup \overline{f(G)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Aus i) und (1), folgern wir:

$$f(H) = D^-(0,1) \cup \overline{D^-(0,1)} = D^-(0,1) \cup D^+(0,1) = D(0,1),$$

wobei $D^+(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \text{ und } \text{Im}(z) \geq 0\}$ und $D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

5. Aufgabe

6 Punkte

(i) Für alle $x = x + 0\,i \in (\mathbb{R} = \partial H)$ gilt:

$$f(x) = \frac{x-i}{x+i} = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1}i\right) \in (K(0,1) = \partial D(0,1)).$$

D.h

$$f(x) = e^{i\theta} \text{ mit } \cos(\theta) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \text{ und } \sin\theta = -\frac{2x}{x^2+1}.$$

Weiterhin, ist $\frac{1}{1+x^2} = \phi(x) = \psi(f(x)) = \psi(e^{i\theta})$ d.h

$$\begin{aligned}\psi(e^{i\theta}) &= \phi(f^{-1}(e^{i\theta})) = \phi\left(\tfrac{-i(e^{i\theta}+1)}{e^{i\theta}-1}\right)\\ &= \phi\left(\tfrac{-ie^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}})}\right)\\ &= \phi\left(\tfrac{-\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right) = \sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

(ii) Die Funktion U ist definiert durch $U(z) = u(f(z)),\ z \in H$.