Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 10
A. Gündel-v. Hofe 31. Juli 2010

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Diese sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Der komplexe Arcustangens arctan sei definiert durch

$$\arctan z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \log \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, \qquad (*)$$

wobei der komplexe Logarithmus log für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ oder $\operatorname{Im} z \neq 0$ definiert ist.

a) Zeigen Sie, dass arctan genau für die Stellen z der Form $z = \mathrm{i}t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $|t| \geq 1$ nicht definiert ist.

b) Berechnen Sie anhand $(*)$ die erste Ableitung der Funktion arctan (für allgemeine z).

c) Geben Sie ein unbeschränktes Gebiet an, auf dem die Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ eine Stammfunktion hat.

2. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben seien die Ringgebiete G_1 und G_2 mit $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-3| < 3\}$ und $G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-5| < 3\}$ sowie die auf $\mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}$ analytische Funktion f mit $f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha \neq \beta$.

Finden Sie Werte für α und β, so dass f eine Laurententwicklung um 3 mit Konvergenzgebiet G_1 und eine Laurententwicklung um 5 mit Konvergenzgebiet G_2 hat und dass beide Konvergenzgebiete nicht vergrößert werden können, also „maximal" sind.

Hinweis: Es gibt mehrere Lösungen für α, β. Sie brauchen hiervon nur eine Lösung anzugeben.

3. Aufgabe

8 Punkte

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{|z-2\mathrm{i}|=\frac{5}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}}{1-z^4}\,\mathrm{d}z.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte und deren Stabilitätscharakter des folgenden dynamischen Systems $(x(t), y(t))$:

$$\dot{x} = (x-1)(y-3), \qquad \dot{y} = (x-2)(y-2).$$

5. Aufgabe

8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind **wahr**, und welche sind **falsch**?

(Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen, keine Antwort gibt 0 Punkte. Bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten gewertet. Es sind keine Begründungen notwendig.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihrem Arbeitsblatt!

a) Jedes nicht-konstante komplexe Polynom stellt eine konforme Abbildung dar.

b) Wenn eine Funktion f in $z_0 \in \mathbb{C}$ eine isolierte, nicht hebbare Singularität hat und auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ analytisch ist, so gilt $\int_C f(z)\mathrm{d}z \neq 0$ für jede Kurve C, die den Punkt z_0 einschließt.

c) Ist für eine komplexe Zahlenfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ der Wert $\mathcal{Z}[(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}](1)$ endlich, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ konvergent.

d) Haben bei einem linearen System alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix einen negativen Realteil, so gibt es einen Gleichgewichtspunkt, der asymptotisch stabil ist.