

Oktober – Klausur (Rechenteil)

Analysis III für Ingenieure

Name: Vorname:

Matr.-Nr.: Studiengang:

Es ist nur ein handbeschriebenes A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die komplexe Funktion f mit

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

Entwickeln Sie f in zwei Laurentreihen um die Stelle 0:

eine im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ und eine im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z|\}$.

2. Aufgabe

10 Punkte

Es sei eine Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ fest vorgegeben. Für $R \in \mathbb{R}^+$ und $R > 1$ sei mit $K^+(R) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto Re^{i\varphi}$ ein gegen den Uhrzeigersinn durchlaufener Halbkreis bezeichnet.

Die beiden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig und bringen jeweils die angegebenen Punkte.

a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K^+(R)} \frac{e^{iz}}{z^3 + ia^3} dz = 0. \quad (*)$$

b) (5 Punkte) Berechnen Sie unter der Voraussetzung der Aussage (*) das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^3 + ia^3} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Hinweis: Verwenden Sie die für $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \geq 0$ und $|\alpha| \neq |\beta|$ gültigen Ungleichungen

$$e^{-x} \leq 1, \quad \frac{1}{|\alpha + \beta e^{iy}|} \leq \frac{1}{||\alpha| - |\beta||}.$$

Die dritten Wurzeln von $-ia^3$ sind $ia, \frac{a}{2}\sqrt{3} - i\frac{a}{2}$ und $-\frac{a}{2}\sqrt{3} - i\frac{a}{2}$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die \mathcal{Z} -Transformierte der Folge $((1 + (-1)^n)n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in geschlossener Form.

Hilfe: Die ersten neun Glieder dieser Folge sind 0, 0, 4, 0, 8, 0, 12, 0 und 16.

4. Aufgabe

10 Punkte

Finden Sie eine harmonische Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für } y > 0 \text{ und } x^2 + (y-10)^2 > 36, \\ u(x, y) &= 0 && \text{für } y = 0, \\ u(x, y) &= 1 && \text{für } x^2 + (y-10)^2 = 36, \end{aligned}$$

indem Sie als Ansatzfunktionen die Funktionen 1 und $\ln(x^2 + y^2)$ sowie die Angabe verwenden, dass die komplexe Funktion f mit $f(z) = i\frac{z+8i}{z-8i}$ erstens die reelle Achse auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und zweitens den Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-10i| = 6\}$ auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ abbildet. Skizzieren Sie den Sachverhalt dazu.