Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 10
A. Gündel-v. Hofe 16. Oktober 2010

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben. Diese sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Eine Möbiustransformation T habe die Fixpunkte $-1-\mathrm{i}$ und $1+\mathrm{i}$ und bilde den Punkt ∞ auf $\mathrm{i}\sqrt{2}$ ab. Eine Halbebene H sei durch $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z\}$ gegeben. Was ist das Bild $T(H)$?

Hinweis: Sie dürfen das Bild $T(H)$ als Zahlenmenge oder mit Worten beschreiben.

2. Aufgabe 7 Punkte

Gegeben ist die Strecke $\mathcal{C} : z(t) = -1 + \mathrm{i}t, -1 \leq t \leq 1$, die von $-1-\mathrm{i}$ nach $-1+\mathrm{i}$ durchlaufen wird.

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z.$$

3. Aufgabe 9 Punkte

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z} - 1}{z^2(z-1)(z+3)} \,\mathrm{d}z.$$

4. Aufgabe 8 Punkte

Ein dynamisches System $(x(t), y(t))$ wird beschrieben durch die nicht-linearen Gleichungen

$$\dot{x} = -x - 3y\mathrm{e}^{-x}, \qquad \dot{y} = 3x\mathrm{e}^{-y} - y.$$

Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0)$ der einzige Gleichgewichtspunkt ist. Bestimmen Sie den Stabilitätscharakter des Gleichgewichtspunkts $(0,0)$.

5. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind **wahr**, und welche sind **falsch**?

(Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, für jede falsche Antwort werden 2 Punkte abgezogen, keine Antwort gibt 0 Punkte. Bei negativer Gesamtpunktzahl wird die Aufgabe mit 0 Punkten gewertet. Es sind keine Begründungen notwendig.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihrem Arbeitsblatt!

a) Es gibt eine Möbiustransformation, die den Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$ auf einen (echten) Kreisring abbildet.

b) Hat eine komplexe Funktion f in einem Gebiet G einen Pol z_0 von 2. Ordnung und ist auf $G \backslash \{z_0\}$ analytisch, so ist $\int_{\mathcal{C}} f(z) = 0$ für jede geschlossene Kurve $\mathcal{C} \subset (G \setminus \{z_0\})$.

c) Sind $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zwei komplexe Zahlenfolgen, so gibt es eine Zahlenfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{Z}[(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}](z)\mathcal{Z}[(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}](z) = \mathcal{Z}[(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}](z)$

d) Ist $p(z)$ ein stabiles Polynom mit reellen Koeffizienten, so ist das Polynom $(z+1)^2 p(z)$ ebenfalls stabil.