Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2011
26.07.2011

Lösungsskizze zur Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ hat Singularitäten in den Punkte 0 und 1 und ist in $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ analytisch. Daher gibt es zwei verschiedene maximale Kreisringe, in denen eine Laurentreihenentwicklung um $z_0 = 0$ konvergieren kann: $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ und $D_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$.

* Für $z \in D_1$ ist $|z| < 1$. Mit der geometrischen Reihe ist $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Es folgt

$$f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\sum_{k=-1}^{\infty} z^k = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \ldots.$$

Diese Laurentreihe konvergiert im Kreisring D_1. Der Innenradius von D_1 ist 0, der Außendradius ist 1.

* Für $z \in D_2$ ist $|z| > 1$, d.h. $\frac{1}{|z|} < 1$. Mit der geometrischen Reihe ist $\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k}$. Es folgt

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{z^k} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \ldots.$$

Diese Laurentreihe konvergiert im Kreisring D_2. Der Innenradius von D_2 ist 1, der Außenradius ist ∞.

2. Aufgabe 10 Punkte

Die Funktion f mit

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-2i)(z-i)z(z+i)(z+2i)}$$

hat nur in den Punkten $2i, i, 0, -i, -2i$ Singularitäten und ist überall sonst in $\mathbb{C}$ analytisch. Nun liegen nur die Singularitäten $2i$, i und 0 innerhalb von $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| = \frac{3}{2}\}$.

Hierbei ist 0 eine hebbare Singularität (z kürzen!), also gilt $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$.

Die Singularitäten $2i$ und i sind Polstellen 1. Ordnung. In diesen hat f die Residuen

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z-2i)(z+i)(z+2i)} = \frac{i^2}{(-i)(2i)(3i)} = \frac{i}{6},$$

$$\mathrm{Res}(f,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z+2i)} = \frac{4i^2}{i(3i)(4i)} = -\frac{i}{3}.$$

(Alternativ mit der Darstellung $f = \frac{g}{h}$ und g-h-Formel für das Residuum.)

Nun berechnen wir das Integral mit dem Residuensatz und erhalten

$$\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f(z),0) + \operatorname{Res}(f(z),i) + \operatorname{Res}(f(z),2i)) = 2\pi i\left(\frac{i}{6} - \frac{i}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

3. Aufgabe 10 Punkte

Wir verwenden die Methode der Verpflanzung mit f und G. Mit den Angaben über f und z.B. $f(11) = i\frac{14}{8} = i\frac{7}{4}$ folgt, dass gilt

$$H := f(G) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

Damit erhalten wir das folgende Dirichlet-Problem auf dem Kreisring H:

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \text{ auf } H, \\ v(x,y) &= 0 \text{ für } x^2 + y^2 = 1, \\ v(x,y) &= 1 \text{ für } x^2 + y^2 = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

Dieses lösen wir mit den harmonischen Ansatzfunktionen 1 und $\ln(x^2+y^2)$. Ansatz für v: $v(x,y) = A + B\ln(x^2+y^2)$, wobei $A, B \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen sind, dass v die Anfangswerte erfüllt. Für (x,y) mit $x^2+y^2 = 1$ gilt

$$0 = v(x,y) = A + B\ln(1) = A.$$

Für (x,y) mit $x^2 + y^2 = 4$ ist weiter

$$1 = v(x,y) = 0 + B\ln(4),$$

also $B = \frac{1}{\ln(4)}$. Somit ergibt sich $v(x,y) = \frac{1}{\ln(4)}\ln(x^2+y^2) = \frac{1}{\ln(4)}\ln(|x+iy|^2)$.

Die Lösung u des ursprünglichen Dirichlet-Problems ergibt sich als

$$u(x,y) = v(\operatorname{Re}(f(x+iy)), \operatorname{Im}(f(x+iy))) = \frac{1}{\ln(4)}\ln(|f(x+iy)|^2).$$

Mit

$$|f(x+iy)|^2 = \left|i\frac{x+iy+3}{x+iy-3}\right|^2 = \frac{|x+3+iy|^2}{|x-3+iy|^2} = \frac{(x+3)^2+y^2}{(x-3)^2+y^2}$$

erhalten wir

$$u(x,y) = \frac{1}{\ln(4)}\ln\left(\frac{(x+3)^2+y^2}{(x-3)^2+y^2}\right).$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 7 Punkte

(i) Die Punkte i und $-i$ gehören zu $\uparrow$ und $\circlearrowleft$, also sind die Bildpunkte $f(i)$ und $f(-i)$ in $\circlearrowleft$ und $\uparrow$, also in der Menge $\{i, -i\}$. Als Möbiustransformation erhält f den Durchlaufsinn. Nun liegen i, -1 und $-i$ in dieser Reihenfolge auf dem positiv durchlaufenen Einheitskreis, also liegen die Bildpunkte $f(i), f(-1) = 0$ und $f(-i)$ in dieser Reihenfolge auf der von unten nach oben durchlaufenen imaginären Achse. Zusammen ist also $f(i) = -i$ und $f(-i) = i$.

(ii) Es gilt $f(i) = -i$, $f(-1) = 0$ und $f(-i) = i$. Mit dem Ansatz $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, folgt:

$$\begin{aligned}
0 = f(-1) &= \frac{-a+b}{-c+d} && \Leftrightarrow b = a. \\
-i = f(i) &= \frac{ai+a}{ci+d} && \Leftrightarrow d + ic = -a + ia \\
i = f(-i) &= \frac{-ai+a}{-ci+d} && \Leftrightarrow d - ic = -a - ia
\end{aligned}$$

Addition und Subtraktion der letzten beiden Gleichungen ergeben $2d = -2a$, also $d = -a$, und $2ic = 2ia$, also $c = a$. Daher ist

$$f(z) = \frac{az+a}{az-a} = \frac{z+1}{z-1}.$$

5. Aufgabe 9 Punkte

Die Funktion f hat nur in $z_0 = 0$ eine Singularität, in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist sie analytisch. Mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1\right) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}z + \dots = \frac{1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{k!},$$

also hat f in 0 eine Polstelle 1. Ordnung.

Es ist

$$g(z) = \sin(\tfrac{1}{z}) + \frac{1}{z^2 + 2z + 1} = \sin(\tfrac{1}{z}) + \frac{1}{(z+1)^2}.$$

Daher hat g nur in 0 und -1 Singularitäten. In einer Umgebung von -1 ist $\sin(\frac{1}{z})$ analytisch und besitzt somit eine Taylorreihenentwicklung in -1:

$$\sin(\tfrac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+1)^k.$$

Somit hat g im Entwicklungspunkt $z_0 = -1$ eine Laurentreihenenwticklung der Gestalt

$$g(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \underbrace{\sin(\tfrac{1}{z})}_{\text{analytisch in } -1} = \frac{1}{(z+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+1)^k$$

Daher ist -1 eine Polstelle 2. Ordnung von g.

In einer Umgebung von 0 gilt für den ersten Summanden

$$\sin(\tfrac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}}.$$

Die Funktion $\frac{1}{(z+1)^2}$ ist analytisch in einer Umgebung von 0 und hat daher eine Talyorreihenentwicklung um 0:

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Die Laurentreihenentwicklung von g mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ ist daher

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{z^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Da unendlich viele Koeffizienten vor negativen Potenzen von z von null verschieden sind, hat g eine wesentliche Singularität in 0.

6. Aufgabe 6 Punkte

Dieses lineare System mit konstanten Koeffizienten lässt sich schreiben als

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Wegen $\det(A) = 15 \neq 0$ ist A invertierbar und das System hat nur den Gleichgewichtspunkt $(0,0)$. Das charakteristische Polynom von A ist

$$P_A(\lambda) = (\lambda+4)^2 - 1 = \lambda^2 + 8\lambda + 15,$$

also sind die Eigenwerte von A

$$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2} = -4 \pm \sqrt{2 \cdot 8 - 15} = -4 \pm 1.$$

also $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -5$.
Da alle Eigenwerte negativen Realteil haben, ist $(0,0)$ nach dem Stabilitätssatz ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

7. Aufgabe 8 Punkte

(i) Da $\Delta u(x,y) = 2+4 = 6 \neq 0$, ist u nicht harmonisch. Da aber der Realteil einer analytischen Funktion harmonisch ist, kann u nicht der Realteil einer analytischen Funktion sein.

(ii) Dies ist falsch, ein Gegenbeispiel ist $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

(iii) Die Aussage ist falsch. Damit jede Gerade wieder auf eine Gerade abgebildet wird, muss $f(\infty) = \infty$ gelten (Kreistreue von Möbiustransformationen und Geraden sind Kreise durch ∞). Hier ist jedoch $f(\infty) = 2$.

(iv) Die Aussage stimmt. Da f analytisch in ganz $\mathbb{C}$ ist, lässt sich f in eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe um $z_0 = 0$ entwickeln: $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$. Da f und dann auch alle Ableitungen im Einheitskreis Null sind, sind alle $f^{(k)}(0) = 0$. Daher ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.