Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
G. Penn-Karras

SoSe 2011
12.10.2011

Lösungsskizze zur Oktober – Klausur Analysis III für Ingenieure

---

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Mit $z = x + iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, ist

$$\begin{aligned} f(z) &= (x+iy)e^{x+iy} = (x+iy)e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \\ &= \underbrace{e^x(x\cos(y) - y\sin(y))}_{=:u(x,y)} + i\,\underbrace{e^x(x\sin(y) + y\cos(y))}_{=:v(x,y)}. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Es sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= e^x(x\cos(y) - y\sin(y)) + e^x\cos(y) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y) + \cos(y)), \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= e^x(x\cos(y) + \cos(y) - y\sin(y)), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= e^x(-x\sin(y) - \sin(y) - y\cos(y)), \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= e^x(x\sin(y) + y\cos(y)) + e^x\sin(y) = e^x(x\sin(y) + y\cos(y) + \sin(y)). \end{aligned}$$

Also gelten

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Damit erfüllt f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in jedem Punkt (x, y) des $\mathbb{R}^2$ und ist somit analytisch in ganz $\mathbb{C}$.

---

2. Aufgabe 10 Punkte

Die Funktion f hat eine Singularität in $z = \frac{1}{4}$, ansonsten ist sie analytisch. Daher existieren zwei Konvergenzbereiche für Laurentreihen von f mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \tfrac{1}{4}\},$$
$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \tfrac{1}{4}\}.$$

Wir bestimmen zuerst die Laurentreihe von f um $z_0 = 0$, die auf D_1 konvergiert. Für $z \in D_1$ gilt $|z| < \frac{1}{4}$, also $|4z| < 1$. Daher folgt

$$f(z) = \frac{z}{4z-1} = -z\frac{1}{1-4z} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} -z\sum_{n=0}^{\infty}(4z)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} 4^n z^{n+1}.$$

Wir bestimmen nun die Laurentreihe von f um $z_0 = 0$, die auf D_2 konvergiert. Für $z \in D_2$ gilt $|z| > \frac{1}{4}$, also $\frac{1}{|4z|} < 1$. Daher gilt

$$f(z) = \frac{z}{4z-1} = \frac{z}{4z}\frac{1}{1-\frac{1}{4z}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4z)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}\frac{1}{z^n}.$$

---

3. Aufgabe 5 Punkte

Mit der Definition des Kurvenintegrals ist

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{6\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\,dt = i\int_0^{6\pi} 1\,dt = 6\pi i.$$

Alternativ: γ beschreibt den dreimal durchlaufenen Einheitskreis, d.h. es gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 3\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz.$$

Nun ist der Residuensatz anwendbar: Mit $\mathrm{Res}(\frac{1}{z}, 0) = 1$ folgt

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 3\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 3\cdot 2\pi i = 6\pi i.$$

---

4. Aufgabe 5 Punkte

Die rechte Seite des Systems ist

$$\vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} -x^3 - y^3 \\ 2xy^2 - y^3 \end{bmatrix}.$$

Als Lyapunov-Funktion für das gegebene Problem muss V in $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum haben, daher müssen $a, b > 0$ sein. Es gilt

$$\mathrm{grad}_{(x,y)}\, V = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\langle \operatorname{grad}_{(x,y)} V, \vec{F}(x,y) \rangle = -ax^4 - axy^3 + 2bxy^2 - by^4 = -ax^4 - by^4 + (2b-a)xy^3.$$

Für z.B. $a := 2 > 0$ und $b := 1 > 0$ ist

$$\langle \operatorname{grad}_{(x,y)} V, \vec{F}(x,y) \rangle = -2x^4 - y^4 \leq 0.$$

Also ist V eine Lyapunov-Funktion und $(0,0)$ ist stabil. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\langle \operatorname{grad}_{(x,y)} V, \vec{F}(x,y) \rangle = -2x^4 - y^4 < 0,$$

also ist $(0,0)$ asymptotisch stabil.

Verständnisteil

5. Aufgabe 8 Punkte

Die Punkte i, -1 und 1 liegen auf dem Einheitskreis. Da Möbiustransformationen kreistreu sind, ist das Bild des Einheitskreises der Kreis, der durch die Punkte ∞, $1+i$ und $1-i$ geht, also die Gerade $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 1\} \cup \{\infty\}$.

Die Punkte $-1, 0, 1$ liegen auf der reellen Achse. Das Bild der reellen Achse unter T ist daher der Kreis (kreistreue!) durch die Punkte $1+i$, $1-i$ und 2, also $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$.

Die beschriebene Möbiustranformation ist $T(z) = \frac{-2i}{z-i}$. Die Berechnung bringt aber keine weitere Erkenntnis.

---

6. Aufgabe 8 Punkte

Die Funktion $f_1(z) = \frac{A}{z-1}$ ist für $A \neq 0$ analytisch in $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, die Funktion $f_2(z) = \frac{B}{z-i}$ ist für $B \neq 0$ analytisch in $\mathbb{C}\backslash\{i\}$. Daher ist

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-i}$$

mit $A \neq 0$ und $B \neq 0$ analytisch in $\mathbb{C}\backslash\{1, i\}$ und hat in 1 und i je eine Polstelle 1. Ordnung. Dann ist

$$\int\limits_{|z|=42} f(z)\,dz = \int\limits_{|z|=42} \frac{A}{z-1}\,dz + \int\limits_{|z|=42} \frac{B}{z-i}\,dz = 2\pi i A + 2\pi i B = 2\pi i(A+B).$$

Dabei haben wir im vorletzten Gleichheitszeichen die Cauchy-Formel bzw. den Residuensatz verwendet. Setzen wir z.B. $A = B = \frac{42}{4\pi i}$, so folgt

$$\int\limits_{|z|=42} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{42}{4\pi i} + \frac{42}{4\pi i} \right) = 42.$$

Also ist eine mögliche Funktion $f(z) = \frac{42}{4\pi i} \frac{1}{z-1} + \frac{42}{4\pi i} \frac{1}{z-i}$.

Eine Alternative ist $f(z) = \frac{42}{2\pi i} \frac{z}{(z-1)(z+i)}$.

---

7. Aufgabe 8 Punkte

Der Schnittpunkt der Kurven C_1 und C_2 ist $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \gamma_1(1) = \gamma_2(\frac{\pi}{4})$. Der Schnittwinkel ist $\frac{\pi}{2}$. Dies ersieht man aus einer Skizze oder berechnet sich wie folgt: Es sind $\dot{\gamma}_1(s) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\dot{\gamma}_2(t) = ie^{it} = e^{i(t+\frac{\pi}{2})}$, also sind $\dot{\gamma}_1(1) = e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $\dot{\gamma}_2(\frac{\pi}{4}) = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})}$. Daher ist der Schnittwinkel $\frac{\pi}{2}$.

Nun ist $f'(z) = 3z^2 + 6z + 3 = 3(z^2 + 2z + 1) = 3(z+1)^2$. Daher ist $f'(z_0) \neq 0$ und f ist in z_0 konform, also winkeltreu.

Daher ist der Schnittwinkel zwischen $f(C_1)$ und $f(C_2)$ gleich dem Schnittwinkel zwischen C_1 und C_2, also $+\frac{\pi}{2}$. Damit schneiden sich die Kurven rechtwinklig.

---

8. Aufgabe 6 Punkte

(i) Falsch: z.B. sind $T_1(z) = z = T_2(z)$ Möbiustransformationen, aber $T_1(z)T_2(z) = z^2$ ist keine Möbiustransformation.

(ii) Wahr: Geraden sind Kreise durch ∞. Falls $T(\infty) = \infty$ ist das Bild jeder Gerade wieder ein Kreis durch ∞, also eine Gerade.

(iii) Falsch: Z.B. ist $f(z) = \exp(z)$ analytisch in $\mathbb{C}$, also $\int_C f(z)\,dz = 0$ für jede geschlossene Kurve nach dem Cauchy-Integralsatz, aber $f(z) \neq 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.