

Lösungsskizze zur Oktober – Klausur Analysis III für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe

10 Punkte

- (i) Zunächst parametrisieren wir C , den mathematisch negativ durchlaufenen Einheitskreis von 1 bis -1 . Offensichtlich ist $\gamma(t) := e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$ eine Parametrisierung von C . Nach Definition des Kurvenintegrals setzen wir ein:

$$\int_C \frac{1}{|z|^2} dz = \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} dz = \int_0^\pi \frac{1}{|\gamma(t)|^2} \dot{\gamma}(t) dt = -i \int_0^\pi e^{-it} dt = e^{-it} \Big|_{t=0}^{t=\pi} = e^{-i\pi} - e^0 = -2.$$

Hier wurde benutzt, dass $|e^{-it}|^2 = 1$. *Achtung:* $z^2 \neq |z|^2$ und $\frac{1}{|z|^2}$ ist nicht analytisch!

- (ii) Der Nenner von $\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}$ hat drei Nullstellen in $G = \{z \mid |z| = \pi\}$, nämlich $z_0 = 0$, $z_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$. Dies sind auch die Singularitäten von $\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}$ in G .

Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_{|z|=\pi} \frac{\sin(z)}{z \cos(z)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}, 0 \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}, \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}, -\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Die Residuen berechnen sich wie folgt.

Bei $z_0 = 0$ tritt der Fall „ $\frac{0}{0}$ “ auf, und eine Anwendung von l'Hospital ergibt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z \cos(z)} \stackrel{\text{„l'H.“}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)}{\cos(z) - z \sin(z)} = \frac{\cos(0)}{\cos(0) - 0} = 1.$$

Also hat $\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}$ in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität und somit ist $\operatorname{Res} \left(\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}, 0 \right) = 0$.

Bei $z_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$ bemerkt man, dass $\frac{\sin(z)}{z}$ in einer Umgebung analytisch ist, so dass

$$\operatorname{Res} \left(\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}, \pm \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sin(z)}{z} \frac{1}{\cos'(z)} \Big|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(z)}{z} \frac{1}{-\sin(z)} \Big|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{z} \Big|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = \mp \frac{2}{\pi}.$$

(Alternativ: $\operatorname{Res} \left(\frac{\sin(z)}{z \cos(z)}, \pm \frac{\pi}{2} \right) = (\sin(z)) \frac{1}{(z \cos(z))'} \Big|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = (\sin(z)) \frac{1}{\cos(z) - z \sin(z)} \Big|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = (\pm 1) \left(\frac{1}{0 - (\pm \frac{\pi}{2})(\pm 1)} \right) = (\pm 1) \left(\frac{-1}{\frac{\pi}{2}} \right) = \mp \frac{2}{\pi}$.)

Und somit

$$\int_{|z|=\pi} \frac{\sin(z)}{z \cos(z)} dz = 2\pi i \left(0 - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \right) = 0.$$

2. Aufgabe

12 Punkte

Nach Partialbruchzerlegung ist

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z}.$$

Die Taylorreihe von $\frac{1}{z}$ in $z = 1$ ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-1+z} = \frac{1}{1-(-(z-1))} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k$$

mit Konvergenzradius $\{z \mid |z-1| < 1\}$. Also lautet die Laurentreihe von f in der gepunkteten Kreisscheibe $\{z \mid 0 < |z-1| < 1\}$

$$\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k = \sum_{k=-2}^{-1} (z-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k.$$

Weiter ist die Laurentreihe von $\frac{1}{z}$ in $z = 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(z-1) - (-1)} = \frac{\frac{1}{z-1}}{1 - \left(\frac{-1}{z-1}\right)} = \frac{1}{z-1} \sum_{k=-\infty}^0 (-1)^{-k} (z-1)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 (-1)^k (z-1)^{k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1} (z-1)^k = - \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^k (z-1)^k \end{aligned}$$

mit Konvergenzradius $\{z \mid |z-1| > 1\}$. Also lautet die Laurentreihe von f im unbeschränkten Außengebiet $\{z \mid |z-1| > 1\}$

$$\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} - \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^k (z-1)^k = \frac{2}{z-1} - \sum_{k=-\infty}^{-3} (-1)^k (z-1)^k.$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Man sieht leicht, dass $(x, y) := (0, 0)$ ein GGP des DGL-Systems

$$\begin{cases} x' = -x + 3y^3, \\ y' = -2xy^2 - x^2y - 5y. \end{cases}$$

ist, denn es gilt $F((0, 0)) = (0, 0)$, wobei

$$F(x, y) := (-x + 3y^3, -2xy^2 - x^2y - 5y).$$

Sei nun $V(x, y) = a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2}$. Dann gilt $\text{grad}_{(x,y)} V = (ax, by)$ und V hat ein striktes lokales (sogar globales) Minimum in $(0, 0)$ für $a, b > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle F(x, y), \text{grad}_{(x,y)} V \rangle \\ = \langle (-x + 3y^3, -2xy^2 - x^2y - 5y), (ax, by) \rangle = -ax^2 + 3axy^3 - 2bxy^3 - bx^2y^2 - 5by^2. \end{aligned}$$

Seien $a, b > 0$. Dann gilt

$$-ax^2 + 3axy^3 - 2bxy^3 - bx^2y^2 - 5by^2 \leq (3a - 2b)xy^3.$$

Sei also $3a - 2b = 0$, bspw. $a = 2, b = 3$. Dann ist

$$-ax^2 + 3axy^3 - 2bxy^3 - bx^2y^2 - 5by^2 = -2x^2 + 6xy^3 - 6xy^3 - 3x^2y^2 - 15y^2 \leq -2x^2 - 3x^2y^2 - 15y^2 \leq 0.$$

Also ist das DGL-System in $(0, 0)$ stabil und V ist eine Lyapunovfunktion für dieses DGL-System. Wenn $(x, y) \neq (0, 0)$, sieht man leicht, dass dann

$$-2x^2 - 3x^2y^2 - 15y^2 < 0,$$

also ist das DGL-System sogar asymptotisch stabil in $(0, 0)$.

Verständnisteil

4. Aufgabe

11 Punkte

(i) $\cosh(x) \cos(y)$ is harmonisch, denn

$$\begin{aligned}\Delta \cosh(x) \cos(y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\cosh(x) \cos(y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \cosh(x) \cos(y) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \cosh(x) \cos(y) \\ &= \cos(y) \frac{\partial}{\partial x} \sinh(x) + \cosh(x) \frac{\partial}{\partial y} (-\sin(y)) \\ &= \cos(y) \cosh(x) - \cosh(x) \cos(y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Harmonische Funktionen sind Realteile analytischer Funktionen.

(ii) Sei $f = u + iv$ mit $u(x, y) = \cosh(x) \cos(y)$. Für v müssen die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen erfüllt sein, d.h. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \sinh(x) \cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\cosh(x) \sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Integrieren ergibt

$$\begin{cases} v = \int \sinh(x) \cos(y) dy = \sinh(x) \sin(y) + C(x), \\ -v = -\int \cosh(x) \sin(y) dx = -\sinh(x) \sin(y) + C(y). \end{cases}$$

Für konstanten $C(x), C(y) \in \mathbb{R}$. Setzt man $C(x) = C(y) = 0$, ergibt das

$$v(x, y) = \sinh(x) \sin(y).$$

Bemerkung: Es gilt

$$f(z) = f(x + iy) = \cosh(x) \cos(y) + i \sinh(x) \sin(y) = \cosh(z).$$

5. Aufgabe

11 Punkte

- (i) 1 liegt auf dem Einheitskreis, und der Einheitskreis wird auf die imaginäre Achse abgebildet. Deshalb muss $T(1)$ rein imaginär sein, d.h. $a = 0$. Also ist $T(1) = bi$ oder $T(1) = \infty$. Es ist aber $T(-i) = -i$ und $T(i) = 2i$ und „ $T(\odot) = \uparrow$ “. Nach Orientierungserhaltung muss also der Halbkreis von $-i$ nach i auf das Stück der imaginären Achse abgebildet, das zwischen $-i$ und $2i$ liegt und zwar von $-i$ an „nach oben“ durchlaufen. Also $T(1) \neq \infty$ und $T(1) = bi$ mit $b \in] -1, 2[$. Das Intervall ist offen wegen $T(1) \neq -i$ und $T(1) \neq 2i$.
- (ii) Die „rechte Hand-Regel“ bzw. Orientierungserhaltung zeigt, dass das Innere des Einheitskreises auf die rechte Halbebene, d.h. $\{z \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ abgebildet wird.
- (iii) Das Bild der reellen Achse schneidet die imaginäre Achse in $T(1) = bi$ (siehe Aufgabenteil (i)). Das Urbild der imaginären Achse ist aber gerade der Einheitskreis. Also soll der Schnittwinkel des Bildes der reellen Achse und des Bildes des Einheitskreises bestimmt werden. Aber in 1 ist der Schnittwinkel dieser beiden (Urbilder) gerade $\frac{\pi}{2}$. Wegen Konformität muss dann das Bild der reellen Achse die imaginäre Achse in bi auch mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ schneiden.

6. Aufgabe

8 Punkte

- (i) Nein. Denn $f'(z) = z^2 + 1$ hat Nullstellen in $z_{1,2} = \pm i$. Also ist f nicht auf ganz \mathbb{C} winkeltreu in $z_{1,2} = \pm i$ (denn die Ableitung darf keine Nullstellen haben, wenn f auf ganz \mathbb{C} konform/winkeltreu sein soll).
- (ii) Ja. Es wird über die gleiche Funktion integriert und die Lage der Singularitäten $z_0 = 0$ und $z_1 = 3$ ist bei beiden Integralen relativ zu den geschlossenen Kreisen $\{z \mid |z - \frac{i}{2}| = 1\}$ und $\{z \mid |z| = 2\}$ gleich, jeweils eine innen und eine außen. Daher stimmen die Integrale nach dem Cauchy'schen-Integralsatz (bzw. Residuensatz) überein. Es gilt

$$\int_{|z - \frac{i}{2}| = 1} \frac{e^{iz}}{z(z-3)} dz = \int_{|z| = 2} \frac{e^{iz}}{z(z-3)} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z(z-3)}, 0 \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{z-3} = -\frac{2}{3}\pi i.$$

- (iii) Ja. p ist genau dann stabil wenn alle Nullstellen von p negativen Realteil haben. Nun hat $-p$ aber genau dieselben Nullstellen wie p .
- (iv) Ja. Offensichtlich ist die Abbildung $z \mapsto \frac{z-1}{2z+i}$ eine Möbiustransformation, denn sie ist von der Form $\frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc = i + 2 \neq 0$. Möbiustransformationen sind aber (in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) invertierbar mit Inversem $\frac{dz-b}{-cz+a}$. Also ist Inverse von $z \mapsto \frac{z-1}{2z+i}$ die Abbildung $z \mapsto \frac{iz+1}{-2z+1}$.