Musterlösung — Analysis III f. Ing., 19. Juli 2013

1. Aufgabe

9 Punkte

Die drei maximalen Konvergenzgebiete sind der Kreis $|z| < 1$, der Kreisring $1 < |z| < 2$ und das Gebiet $|z| > 2$, welches das Außengebiet eines Kreises ist.
Man hat die folgenden Rechnungen:

- $|z| < 1$:

$$\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-(-z)} = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-2)^{n+1}}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{1}{(-2)^{n+1}}\right)z^n$$

- $1 < |z| < 2$:

$$\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2-(-z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}$$
$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-2)^{n+1}}z^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-2)^{n+1}}z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-2)^{n+1}}z^n$$

- $2 < |z|$:

$$\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{z}\right) \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{z}\right)}$$
$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^{n+1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cdot(-2)^n\right)z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cdot(-2)^{-n}\right)z^n = \sum_{n=-1}^{\infty}\left(1-(-2)^{-n-1}\right)z^n$$

2. Aufgabe

10 Punkte

a) Man wandelt dieses Integral in ein Integral über den Einheitskreis um und benutzt dann den Residuensatz.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}{1-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi &= -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\cdot \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\mathrm{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{1-4z^2}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Der Integrand hat $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ als Polstellen 1. Ordnung. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}{1-4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi &= -\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{z}{1-4z^2},\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{z}{1-4z^2},-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 2\pi\left(\left.\frac{z}{-8z}\right|_{z=\frac{1}{2}}+\left.\frac{z}{-8z}\right|_{z=-\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b) Die Nullstellen des Nenners sind $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$, von denen haben nur die ersten beiden positiven Imaginärteil. Die Nullstellen sind allesamt einfach.
Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1+x}{1+x^4},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1+x}{1+x^4},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{1+x}{4x^3}\right|_{x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}+\left.\frac{1+x}{4x^3}\right|_{x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{x+x^2}{4x^4}\right|_{x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}+\left.\frac{x+x^2}{4x^4}\right|_{x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\left.\frac{x+x^2}{(-4)}\right|_{x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}+\left.\frac{x+x^2}{(-4)}\right|_{x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}\right) \\ &= -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\right) \\ &= -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\right) \\ &= -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3. Aufgabe

11 Punkte

Die Abbildung $z \mapsto z^2$ als Abbildung im $\mathbb{R}^2$ gelesen bedeutet wegen
$z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i} \cdot 2xy$ die Zuordnung $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

Die x-Achse wird mit $(t, 0)$ parametrisiert, die Winkelhalbierende $(y = x)$ mit (t, t) — beidemals mit $0 \leq t < \infty$. Dann werden die Randkurven wie folgt abgebildet:

$$(t, 0) \mapsto (t^2, 0), \qquad (t, t) \mapsto (0, 2t^2).$$

(Insbesondere finden wir als Bildgebiet korrekt den 1. Quadranten wieder.)
Für die Randwerte einer auf dem 1. Quadranten harmonischen Funktion v haben wir zu setzen:

$$u(t, 0) = t^4 = v(t^2, 0) u(t, t) = -4t^4 = v(0, 2t^2),$$

das heißt

$$v(x, 0) = x^2, \quad v(0, y) = -y^2.$$

Mit dem vorgeschlagenen Ansatz setzen wir $v(x, y) = A(x^2 - y^2) + Bx + Cy$ und finden sofort $A = 1$, $B = 0$, und $C = 0$.
Damit ist $v(x, y) = x^2 - y^2$.

Mit der oben genannten $\mathbb{R}^2$-Abbildung ist dann

$$u(x, y) = (x^2 - y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2.$$

Die gesuchte harmonische Funktion u ist gleich $(x^2 - y^2)^2 - 4x^2y^2$.

4. Aufgabe

10 Punkte

Die Achsen schneiden sich in genau den zwei Punkten 0 und ∞. Da die Achsen unter T vertauscht und Schnittpunkte auf Schnittpunkte abgebildet werden, kann nur $T(0) = 0,\ T(\infty) = \infty$ oder $T(0) = \infty,\ T(\infty) = 0$ eintreten.
Der Punkt 0 liegt im Inneren des positiv durchlaufenen Einheitskreises $\circlearrowleft$. Weil die Möbius-Transformationen orientierungstreu sind, muss der Bildpunkt $T(0)$ außerhalb des negativ durchlaufenen Einheitskreises liegen. Damit kann nicht $T(0) = 0$ gelten.
Folglich werden die Schnittpunkte 0 und ∞ unter f vertauscht: $T(0) = \infty$ und $T(\infty) = 0$.
Mit der allgemeinen Form

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

gilt

$$T(0) = \frac{b}{d} = \infty \implies d = 0, \qquad T(\infty) = \frac{a}{c} = 0 \implies a = 0.$$

Es bleibt

$$T(z) = \frac{b}{cz}$$

. Mit $T(-\mathrm{i}) = 1$ ist

$$T(-\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}b}{c} = 1 \implies c = \mathrm{i}b.$$

Somit ist mit

$$T(z) = -\frac{\mathrm{i}}{z}$$

die verlangte Möbius-Transformation T gegeben.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) In der punktierten Ebene $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ ist die Funktion $-\frac{1}{z-1}$ eine Stammfunktion des Integranden $\frac{1}{(z-1)^2}$.
Die Strecke $\mathcal{C}$ enthält nicht den Punkt 1 und liegt damit gänzlich in dieser punktierten Ebene.
Es ist

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = \left(-\frac{1}{\mathrm{i}-1}\right) - \left(-\frac{1}{-\mathrm{i}-1}\right) = \left(\frac{1}{1-\mathrm{i}} - \frac{1}{1+\mathrm{i}}\right) = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}.$$

b) Es muss ein verschobener Logarithmus aufgefunden werden, dessen Schlitz nicht auf der Strecke von $-\mathrm{i}$ nach i liegt.
Die Funktion $\ln \mathrm{i}(z-1)$ ist auf $\mathbb{C}$ außer für $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z \geq 0$ eine Stammfunktion für $\frac{1}{z-1}$.
Wir prüfen unser Ausschlusskriterium nach: Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ist $\mathrm{i}(z-1) = -y + \mathrm{i}(x-1)$, also muss in der Tat $x = 1, y \geq 0$, d.h. $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z \geq 0$ ausgeschlossen werden.
Die Kurve $\mathcal{C}$ liegt wegen $\operatorname{Re}\mathcal{C}(t) = 0$ in diesem Schlitzgebiet.

Damit gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z &= \ln \mathrm{i}(\mathrm{i}-1) - \ln \mathrm{i}(-\mathrm{i}-1) = \ln(-1-\mathrm{i}) - \ln(1-\mathrm{i}) \\ &= \left(\ln 2 - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right) - \left(\ln 2 - \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right) = -\mathrm{i}\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4} = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.
Ein Gegenbeispiel: Die Funktion x und die konstante Funktion 2 sind harmonisch, aber mit $f(x + \mathrm{i}y) = x + 2\mathrm{i}$ erhält man keine analytische Funktion, da die Cauchy-Riemann-DGL nicht erfüllt werden.

b) Wahr.
Jede Möbius-Transformation ist durch Vorgabe von drei Punkt-Bildpunkt-Paaren eindeutig festgelegt (Sechs-Punkte-Satz) und damit auch durch drei Fixpunkte. Andererseits hat die Identitätstransformation drei Fixpunkte. Also kann eine Möbius-Transformation mit drei Fixpunkten nur gleich der Identitätstransformation sein.

c) Wahr.
Die Stelle 0 ist die einzige Singularität des Integranden $\frac{1}{z}$. Der Punkt 0 liegt außerhalb jeden Kreises $|z - 2R| = R$, denn mit $|0 - 2R| = 2R$ ist er vom Mittelpunkt $2R$ weiter als R entfernt.
Es gibt ein Gebiet, welches den Kreis $|z - 2R| = R$ echt enthält aber nicht den Punkt 0, z.B. die offene Kreisscheibe $|z - 2R| < \frac{3}{2}R$.
Auf diesem Gebiet ist der Integrand $\frac{1}{z}$ analytisch, und nach dem Integralsatz von Cauchy verschwindet das Integral über die Kurve $\mathcal{C}$.

d) Falsch.

α) Die Laurent-Reihe dieser Funktion ist gleich $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n$ und hat insbesondere keinen Hauptteil. Damit ist die Stelle 0 keine Polstelle 1. Ordnung.

β) Wäre die Stelle 0 eine Polstelle 1. Ordnung, so müsste sich der betreffende Term $\frac{\mathrm{e}^z - 1}{z}$ in der Form $\frac{g(z)}{z}$ mit $g(0) \neq 0$ schreiben lassen. Es bleibt nur $g(z) = \mathrm{e}^z - 1$, und hier ist aber $g(0) = 0$. Damit ist die Stelle 0 keine Polstelle 1. Ordnung.

Die Stelle 0 ist eine hebbare Singularität.

e) Wahr.
Das Residuum ist der Koeffizient, mit dem der Term $\frac{1}{z - z_0}$ in einer Laurent-Entwicklung von $f(z)$ um z_0 auftritt. Wäre das Residuum ungleich Null, so würde man mit $z = z_0$ auf die Definitionslücke von $\frac{1}{z - z_0}$ stoßen. Dann kann z_0 aber nicht zum Definitionsbereich von $f(z)$ gehören.