Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SoSe 13

A. Gündel-vom Hofe 09. Oktober 2013

Oktober – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

9 Punkte

Entwickeln Sie die Funktion $\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1}$ in Laurent-Reihen um die Stelle $z_0 = 0$ auf allen möglichen maximalen Konvergenzgebieten.
Hinweis: Es gibt drei maximale Konvergenzgebiete.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihen akzeptieren wir die Schreibweisen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\cdots) z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} (\cdots) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\cdots) z^n.$$

2. Aufgabe

11 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\, \mathrm{d}\varphi$ **(5 Punkte)** und b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}\, \mathrm{d}x$ **(6 Punkte)**

durch Auswertung von geeigneten Residuen.
Hinweis: Eine Abschätzung von Beiträgen unendlich großer Halbkreise o. dgl. ist nicht verlangt.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gesucht wird eine zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion u auf dem Abschluss $\overline{G}$ des Gebiets G mit

$$G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < 1 \text{ und } \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 > \frac{16}{9} \right\}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 && \text{für } (x,y) \in G, \\ u(x,y) &= 1 && \text{für } x = 1, \\ u(x,y) &= 1 + \ln 4 && \text{für } \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Außerdem ist als bekannt vorgegeben: Die Möbiustransformation $T_1\colon z \mapsto -1 + \frac{2}{z}$ bildet die Gerade $\operatorname{Re} z = 1$ auf den Kreis $|w| = 1$ und den Kreis $\left|z + \frac{2}{3}\right| = \frac{4}{3}$ auf den Kreis $|w| = 2$ ab. Sie brauchen diese Eigenschaften *nicht* nachzuweisen.

Lösen Sie das Randwertproblem $(*)$, indem Sie das Gebiet G mit Hilfe von T_1 auf einen offenen Kreisring abbilden und den Ansatz $A \ln(x^2 + y^2) + B$ mit noch zu bestimmenden Konstanten A und B verwenden.

Hinweis: Verwenden Sie im *Bild*gebiet die Beziehung $x^2 + y^2 = |w|^2$.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die Möbius-Transformation $T_2\colon z \mapsto \frac{z+1}{-z+1}$.

a) Zeigen Sie, dass die Möbius-Transformation T_2 die reelle Achse unter Beibehaltung des Durchlaufssinns auf sich selbst und die von unten nach oben durchlaufene imaginäre Achse auf den im positiven Drehsinn durchlaufenen Kreis $|w| = 1$ abbildet.

$$T_2(\rightarrow) = \rightarrow, \qquad T_2(\uparrow) = \circlearrowleft .$$

b) Zeigen Sie, dass für $m \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ die Möbius-Transformation T_2 einen Kreis $|z - m| = r$ genau dann auf eine Gerade abbildet, wenn $|m - 1| = r$ gilt.

c) Beschreiben Sie das Bild des zweiten Quadranten ($\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$) unter der Möbius-Transformation T_2. Verwenden Sie dabei die Angaben von Teilaufgabe a).

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sind folgende drei gerichtete Strecken in der komplexen Ebene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1\colon t &\mapsto -2 + \mathrm{i}t, & -1 \le t \le 1,\\
\mathcal{C}_2\colon t &\mapsto \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)(t-1), & -1 \le t \le 1,\\
\mathcal{C}_3\colon t &\mapsto \left(-1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)(t+1), & -1 \le t \le 1.
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z \quad \textbf{(4 Punkte)} \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z \quad \textbf{(4 Punkte)}.$$

b) Die Kurve $-\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ ist eine geschlossene Kurve. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z \quad \textbf{(2 Punkte)}.$$

Hinweise: Jede der drei Kurven $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ und $\mathcal{C}_3$ verbindet zwei der drei Punkte $-2 - \mathrm{i}$, $-2 + \mathrm{i}$ und 0.
Die Kurve $-\mathcal{C}_1$ ist gleich der Kurve $\mathcal{C}_1$, die aber rückwärts durchlaufen wird:

$$-\mathcal{C}_1\colon t \mapsto -2 - \mathrm{i}t, \quad -1 \le t \le 1.$$

Für Aufgabe 6 bitte wenden!

6. Aufgabe

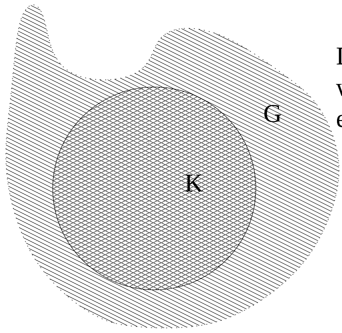
10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Die komplexe Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch.

b) Die analytische Abbildung $f(z) = \mathrm{e}^z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ winkeltreu.

c) Gilt für eine komplexe Funktion f die Aussage $\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, so gibt es ein die Kreisscheibe $|z| \leq 1$ echt umfassendes Gebiet G, auf dem die Funktion f analytisch ist.



Die Kreisscheibe K
wird vom Gebiet G
echt umfasst.

d) Die komplexe Funktion $f(z) = \frac{z^2}{z}$ hat an der Stelle 0 eine hebbare Singularität.

e) Die $\mathcal{Z}$-Transformierte der Folge $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ ist gleich $\frac{z^2}{z^2-1}$.