Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 14
G. Penn-Karras 31. Juli 2014

Juli – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

9 Punkte

Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{3}{z(z-3)}$ in eine Laurent-Reihe um die Stelle $z_0 = 1$, die im Ringgebiet $1 < |z-1| < 2$ konvergiert.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihe akzeptieren wir die Schreibweisen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cdots)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\cdots)z^{n}, \quad \sum_{n=-1}^{-\infty}(\cdots)z^{n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\cdots)z^{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\cdots)z^{n}.$$

2. Aufgabe

12 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ **(6 Punkte)** und b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$ **(6 Punkte)**

durch Auswertung von geeigneten Residuen.
Hinweis: Teil b) darf mit einer Aussage aus dem Skript oder der Vorlesung berechnet werden. Eine Abschätzung braucht nicht durchgeführt zu werden.

3. Aufgabe

9 Punkte

Finden Sie eine auf dem Winkelgebiet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < x\}$ harmonische Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Randwertvorgaben

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 2x^2 \quad \text{für } y = 0,\\ u(x,y) &= 6x^2 \quad \text{für } x = y, \end{aligned} \qquad (*)$$

indem Sie die folgenden Schritte durchführen:

a) Zeigen Sie, dass die komplexe Abbildung $f\colon z \mapsto z^2$ das Winkelgebiet auf den 1. Quadranten $\{(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \tilde{x} > 0 \text{ und } \tilde{y} > 0\}$ abbildet. Benutzen Sie $\tilde{x} = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y)$ und $\tilde{y} = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y)$.

b) Es sei mit $\tilde{u}$ die auf den 1. Quadranten verpflanzte Funktion bezeichnet, so dass $u = \tilde{u} \circ f$ gilt. gilt. Prüfen Sie für die verpflanzte Funktion $\tilde{u}$ die Randwertvorgaben

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y}) &= 2\tilde{x} \quad \text{für } \tilde{y} = 0,\\ \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y}) &= 3\tilde{y} \quad \text{für } \tilde{x} = 0, \end{aligned}$$

nach, indem Sie die Formel $u(x,y) = \tilde{u}(\operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y))$ auf die ursprünglichen Randwertvorgaben $(*)$ für die Funktion u anwenden.

c) Lösen Sie das Randwertproblem für die auf dem 1. Quadranten harmonische Funktion $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y})$, indem Sie den Ansatz $A(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2) + B\tilde{x} + C\tilde{y}$ mit festzulegenden reellen Konstanten A, B und C verwenden.

d) Ermitteln Sie die Funktion $u(x,y)$ mit Hilfe der Formel $u(x,y) = \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y})$.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie die Möbius-Transformation T mit $T(z) = \frac{1}{z}$ und drei gerichtete Geraden $\nwarrow$, $\swarrow$ und $\rightarrow$ in der komplexen Zahlenebene, die wie folgt bestimmt sind:

- $\nwarrow$ geht durch die Punkte 1 und i,
- $\swarrow$ geht durch die Punkte i und -1,
- $\rightarrow$ geht durch die Punkte -1 und 1.

Außerdem schließen die Geraden $\nwarrow$, $\swarrow$ und $\rightarrow$ ein (endlich großes) Dreiecksgebiet $\triangle$ ein.

a) Bestimmen Sie geometrisch (z.B. mit Hilfe einer kommentierten Skizze) die Bildkurven der Geraden $\nwarrow$, $\swarrow$ und $\rightarrow$ unter der Möbius-Transformation T. Geben Sie auch die Durchlaufrichtungen an.

b) Beschreiben und skizzieren Sie das Bild des Dreiecksgebiets $\triangle$ unter der Möbius-Transformation T.

Hinweise: Achten Sie auch auf die Punkte 0 und ∞. Für die Bildkurven des Aufgabenteils a) bitte keine aufwändigen Rechnungen zur Bestimmung von Kreis- oder Geradengleichungen.

5. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die Integrale

a) $$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z \qquad \text{mit } \mathcal{C}\colon t \mapsto -2 + \mathrm{i}t,\ -1 \le t \le 1$$ **(6 Punkte)**

und

b) $$\int_{|z+1|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z-1}\,\mathrm{d}z.$$ **(4 Punkte)**

Bitte Aufgabe 6 auf der Rückseite beachten!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Mit $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ (d.h. H steht für die offene rechte Halbebene) gilt: Die Funktion $f\colon H \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \ln\sqrt{x^2+y^2}$, ist auf dem Gebiet H harmonisch.

b) Sind $T_1(z)$ und $T_2(z)$ zwei Möbius-Transformationen, so ist auch die Summe $T_1(z) + T_2(z)$ eine Möbius-Transformation.

c) Ist eine komplexe Funktion $f(z)$ auf der gesamten komplexen Ebene analytisch, so gilt für jede geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ die Gleichung $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

d) Für eine analytische Funktion $f(z)$ gilt: Ist die Stelle z_0 ein Pol 2. Ordnung, so gilt $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = 0$.

e) Das Verhalten des dynamischen Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

in der Nähe des Gleichgewichtspunkts $(0,0)$ wird durch das folgende Phasenporträt beschrieben: