Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 14
G. Penn-Karras 09. Oktober 2014

Oktober – Klausur
Analysis III für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist nur ein handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

9 Punkte

Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{4}{(z-1)(z+3)}$ in eine Laurent-Reihe um die Stelle $z_0 = 2$, die im Ringgebiet $1 < |z-2| < 5$ konvergiert.

Zur Bewertung: Für die Laurent-Reihe akzeptieren wir die Schreibweisen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1}(\cdots)(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^n$$

$$\text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}(\cdots)(z-z_0)^n.$$

2. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\text{a)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{(5 Punkte)} \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \quad \text{(5 Punkte)}$$

durch Auswertung von geeigneten Residuen.
Hinweis: Teil b) darf mit einer Aussage aus dem Skript oder der Vorlesung berechnet werden. Eine Abschätzung braucht nicht durchgeführt zu werden.

3. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben ist die Möbiustransformation T mit $T(z) = \dfrac{\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}}$ und die gelochte obere Halbebene $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y > 0 \text{ und } x^2 + (y-\frac{5}{3})^2 > \frac{16}{9}\}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Möbiustransformation T die obere Halbebene $y > 0$ auf das Innere des Einheitskreises abbildet.

b) Die Möbiustransformation T bildet den Kreis $|z - \frac{5}{3}\mathrm{i}| = \frac{4}{3}$ auf den Kreis $|z| = \frac{1}{2}$ ab **(nicht nachrechnen!)**. Beschreiben und skizzieren Sie das Bildgebiet $T(G)$, auf welches die gelochte Halbebene G unter T abgebildet wird.

c) Gegeben ist das Randwertproblem in G

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{für } (x,y) \in G, \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{für } y = 0, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{für } x^2 + (y-\tfrac{5}{3})^2 = \tfrac{16}{9}. \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem durch Verpflanzung mit Hilfe der Möbius-Transformation T und der Ansatzfunktion $\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y}) = A\ln(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2) + B$ mit reellen Konstanten A und B.

Hinweise: Benutzen Sie $|T(z)|^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$.
Beachten Sie auch die Rechenregel $\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right|^2 = \dfrac{|az+b|^2}{|cz+d|^2}$.

Bitte 2. Blatt beachten!

Name: .... Matr.–Nr.: ....

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

In dieser Aufgabe wird für $z \in \mathbb{C}$ die komplexe Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{\bar{z}}$ betrachtet. $\bar{z}$ ist die komplex Konjugierte von z.

a) An welchen Stellen z ist die Funktion $\mathrm{e}^{\bar{z}}$ komplex-differenzierbar?

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{|z|=1} \mathrm{e}^{\bar{z}} \,\mathrm{d}z,$$

indem Sie die auf dem Einheitskreis gültige Beziehung $\bar{z} = z^{-1}$ benutzen.

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z$ für $z \in \mathbb{C}$.

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist der Kreisbogen $\mathcal{C}\colon t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$. Berechnen Sie die beiden Integrale mit Hilfe einer Stammfunktion und begründen Sie Ihre Wahl der Stammfunktion:

a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z^2} \,\mathrm{d}z$ (5 Punkte) und b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z.$ (5 Punkte)

Warnung: Die Integrale sind **nicht** als Parameterintegrale auszuwerten!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Die komplexe Funktion $z\mathrm{e}^z$ ist im Punkt $z = 0$ winkeltreu.

b) Die komplexe Funktion $T(z) = 1$ ist eine Möbius-Transformation.

c) Die $\mathcal{Z}$-Transformierte der Folge $(1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ ist gleich $\frac{1}{z}$.

d) Für das Polynom $p(z) = (z+1)^2$ gilt die Behauptung: Die Nyquist-Kurve $p(\mathrm{i}t)$ für $t > 0$ läuft durch genau zwei Quadranten.

e) Das dynamische System (x, y), welches durch $\dot{x} = -x + 2y$, $\dot{y} = -y$ beschrieben wird, besitzt in $(0, 0)$ einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt.